F 227

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Azok a csodálatos húrnégyszögek

(Dr. Gerőcs László)

Algoritmusok a középiskolában: a mohó algoritmus

(Surányi László)

Egy francia érettségi feladatsor

(Honti Dénes)

Versenynaptár az 1998/99-es tanévre

VERSENGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK 2

VI. ÉVFOLYAM 1998 1-2

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3./B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Egész Tamás
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 780 Ft.

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-7576

Készült a Szegedi Kossuth Nyomdában
Felelős vezető: Gera Imre

TARTALOM

Egy felmérés tanulságai
Dr. Kovácsné Pető Andrea, Debrecen

Azok a csodálatos húrnégyszögek
Dr. Gerőcs László, Budapest

A XXVII. Országos Kalmár László Matematika Verseny döntőjéről
Dr. Urbán János, Budapest

Algoritmusok a középiskolában: a mohó algoritmus
Surányi László, Budapest

Az 1998. évi Beke Manó Emlékdíjasok

Beszámoló a VII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyről
Dr. Urbán János, Budapest

Egy francia érettségi feladatsor
Honti Dénes, Győr

Versenynaptár az 1998/99-es tanévre

Hírek versenyekről

Feladatrovat tanároknak

Kiegészítés Nemetz Tibor: A statisztika jelentősége napjainkban című cikkéhez

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utalunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében adóazonosító számukat is. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Dr. Kovácsné Pető Andrea

Egy felmérés tanulságai

Nagyon sok helyen viszonylag egyértelmű mutatókkal lehet az eredményességet, a munka hatékonyságát mérni. Úgy véljük, hogy a tanítás, és ezen belül a matematikatanítás nem tartozik ezek közé a területek közé. Az állandóan változó társadalmi és gazdasági környezet ugyanis sokszor a korábbiaktól teljesen eltérő feladatok, célok és követelmények elé állítja a pedagógust és a diákot egyaránt. Ilyen környezetben nem rendelkezhetünk abszolút, örökérvényű tanítási módszerekkel; ezeket a kitűzött feladat és munkavégzésünk hatásfokának függvényében állandóan módosítani kell. A szükséges változtatások végrehajtásához így a tananyag elsajátításának mutatóit folyamatosan vizsgálni kell.

Az 1986-ban elindított Monitor felmérés 1991-es és 1993-as eredményei a fentieken túl tendenciákat, illetve előrejelzéseket is prognosztizáltak. Az általános iskolákban mért teljesítmények például 1991-ben az 1986-os, kimagaslóan jó értékekkel szemben fokozatos, de egyértelmű romlást mutatnak[1]. Középiskolai szinten viszont a gimnáziumok közötti erőteljes polarizálódás az állandó színvonalú szakközépiskolai oktatás mellett egy nyugati típusú átalakulást sejtet: a középiskolák egy részének általános középiskolává való alakulását[2].

Érdemes tovább vinni az utóbbi gondolatot. Vajon ugyanezek a folyamatok (a „hanyatlás" mellett) megjelennek az általános iskolákban is?

A kérdés megválaszolásához idézzük fel A Matematika Tanítása – e folyóirat elődjének – egy 1984-ben megjelent írását[3]. Ebben a szerzők 22 debreceni általános iskola 1371 nyolcadik osztályos tanulójával íratott feladatlap elemzését közlik. A két (A és B) változatban kiadott feladatlapok az alábbi feladatokat tartalmazták.

A) 1. *a)* Rendezd nagyság szerint sorba a következő számokat!

$$\frac{2}{3},\ -\frac{3}{2},\ \frac{4}{10},\ \frac{11}{4},\ -\frac{9}{5},\ \frac{1}{13}.$$

b) Jelöld meg helyüket a számegyenesen!

B) 1. *a)* Rendezd nagyság szerint sorba a következő számokat!

$$\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ -\frac{6}{10},\ \frac{13}{5},\ \frac{7}{3},\ -\frac{2}{15}.$$

b) Jelöld meg helyüket a számegyenesen!

A) 2. Írd fel tizedes tört alakban:

$$a)\frac{3}{4},\ b)\frac{5}{3},\ c)\frac{2}{5},\ d)\frac{81}{100}$$

B) 2. Írd fel tizedes tört alakban:

$$a)\frac{2}{3},\ b)\frac{4}{5},\ c)\frac{5}{4},\ d)\frac{125}{100}$$

A) 3. Írj legalább egy olyan számot, amelyre igaz:

a) – 1/100-nál nagyobb negatív racionális szám;

b) olyan természetes szám, amelyiknek a reciproka kisebb, mint 1/23.

B) 3. Írj legalább egy olyan számot, amelyre igaz:

a) – 1/50-nél kisebb negatív racionális szám;

b) olyan természetes szám, amelyiknek a reciproka nagyobb, mint 1/32!

A) 4. Milyen számokra igaz, hogy nagyobbak –2-nél és kisebbek 12-nél

I. a természetes számok között,

II. az egész számok között?

B) 4. Milyen számokra igaz, hogy nagyobbak –5-nél és kisebbek 10-nél

I. a természetes számok között,

II. az egész számok között?

A) 5. Végezd el az alábbi műveleteket:

$a) -1{,}5 : 0{,}045 =$, $b) \left(\frac{3}{4} - 0{,}375\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) =$

B) 5. Végezd el az alábbi műveleteket:

$a) 3{,}51 : (-0{,}065) =$, $b) \left(-\frac{3}{4} + 0{,}375\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right) =$

A) 6. Oldd meg!

$$\frac{x}{5} + 1 = \frac{x}{3}$$

B) 6. Oldd meg!

$$\frac{2}{3}x - 5 = \frac{x}{2}$$

A) 7. Két, egymástól 20 km-re levő helységből egyszerre indul el egy-egy jármű: az egyik 30 km/h, a másik 10 km/h sebességgel halad. Mekkora távolságban lesznek egymástól 2/5 óra múlva, ha

a) egymással szemben haladnak azonos útvonalon;

b) egy irányban haladnak úgy, hogy a nagyobb sebességű jármű a kisebb sebességű jármű kiindulási helye felé közeledik?

B) 7. Két, egymástól 20 km-re levő helységből egyszerre indul el egy-egy jármű: az egyik 30 km/h, a másik 10 km/h sebességgel halad. Mekkora távolságban lesznek egymástól 2/5 óra múlva, ha

a) egymással szemben haladnak azonos útvonalon;

b) egy irányban haladnak úgy, hogy a kisebb sebességű jármű a nagyobb sebességű jármű kiindulási helye felé közeledik?

A) 8. Egy téglalap a oldalát ($a = 1{,}5$ dm) 10%-kal, b oldalát ($b = 20$ cm) 20%-kal megnöveltük. Hány százalékkal nőtt az eredeti téglalap területe? (Rajzolni szabad!)

B) 8. Egy téglalap a oldalát ($a = 10$ cm) 20%-kal, b oldalát ($b = 2{,}5$ dm) 10%-kal megnöveltük. Hány százalékkal nőtt az eredeti téglalap területe? (Rajzolni szabad!)

Ugyanezt a feladatsort 1996-ban és 1997-ben a tanév végén 5 iskola 156 nyolcadik osztályos tanulójával mi is megoldottuk. A korábbiaknál sokkal szerényebb méretek a mintavételi eljárások teljes körű, azaz reprezentatív megvalósítását nem tették ugyan lehetővé, de arra azért törekedtünk, hogy a különböző környezettel, gyerekanyaggal, tanári karral és felszereltséggel rendelkező iskolák között szerepeljen

- belvárosi elitiskola,
- főként hátrányos helyzetű fiatalokkal foglalkozó iskola,
- lakótelepi iskola és
- kertvárosi iskola

átlagos, tehát nem a legjobb és nem a leggyengébb tanulmányi eredményű osztálya.

Munkahipotézisünk a Monitor '93 vizsgálat alapján az, hogy az általános iskolák közötti színvonalkülönbségek (a matematika szempontjából) az eltelt időszakban növekedtek: a kiválók még jobbak, a gyengék még rosszabbak lettek. (A mintavétel sajátosságai, szűk keresztmetszete miatt csak magát a tényt, nem pedig ennek pontos mértékét kívánjuk meghatározni. Ugyanez igaz a tudásszint-csökkenés feltételezett kimutatására is, ezért itt ezzel a megállapítással részletesebben nem kívánunk foglalkozni.)

A tanulók eredményei az egyes feladatokban az alábbiak szerint alakultak (zárójelben az 1983. évi adatok szerepelnek).

1. feladat

A tanulók teljesítménye: 68,0% (64,7%).
Az iskolák szélső értékei: 34% – 87% (40% – 90%).

2. Feladat
A tanulók teljesítménye: 93,3% (92,9%).
Az iskolák szélső értékei: 88% – 100% (86% – 100%).

3. feladat
A tanulók teljesítménye: 29,9% (60%).
Az iskolák szélső értékei: 18% – 50% (34% – 91%).

4. feladat
A tanulók teljesítménye: 68,8% (65,5%).
Az iskolák szélső értékei: 48% – 100% (37% – 85%).

5. feladat
A tanulók teljesítménye: 67,7% (69,0%).
Az iskolák szélső értékei: 39% – 87% (56% – 90%).

6. feladat
A tanulók teljesítménye: 73,1% (68,8%).
Az iskolák szélső értékei: 46% – 94% (53% – 95%).

7. feladat
A tanulók teljesítménye: 36,3% (43%).
Az iskolák szélső értékei: 16% – 89% (20% – 68%).

8. feladat
A tanulók teljesítménye: 46,3% (45,6%).
Az iskolák szélső értékei: 14% – 81% (24% – 65%).

Az adatok között különösen figyelemre méltók a 3. feladatnál kapott gyenge eredmények. Ezek valószínűleg azzal magyarázhatók, hogy a legalább szót vagy a pontosan szóval azonosították a diákok, vagy szokatlan volt az olyan probléma, mely nem egyértelműen meghatározott megoldást kért eredményül, vagy pedig a tanulók csak a minimális teljesítmény elérésére törekedtek. Ennek az utóbbi ténynek az elemzése egymagában is nagyon érdekes téma lehetne a pedagógia, a pszichológia és a szociológia számára; azonban mi erre itt nem vállalkozhatunk. Vállalt feladatunk a szélső értékek elmozdulásának a kimutatása, mely szerint az eltelt több mint tíz év alatt a legrosszabb átlag (a leggyengébb osztályok átlagainak átlaga) a tipikus hibák megmaradásával 41,4%-ról 34,6%-ra csökkent, míg a legjobb átlag 83,5%-ról 86,0%-ra nőtt. (Ez utóbbi eredményben még benne sincsenek a korábban nem létező matematika tagozatos osztályok és a hatosztályos gimnáziumok megfelelő évfolyamainak eredményei, amelyek feltehetően még tovább emelnék az utóbbi átlagot.)

Ez azt mutatja, hogy azok az iskolák, amelyekben egyébként is magas színvonalú oktatás folyik, jó úton haladnak. Másfelől viszont azok, amelyekben leginkább valamilyen ok miatt hátrányos helyzetű gyerekek tanulnak, egyre jobban lemaradnak. Ha nem akarjuk, hogy ez a lemaradás behozhatatlanná változzon, és hogy ezek az iskolák csak egyfajta gyermekmegőrzőként a társadalom változásaiba beilleszkedni nem, vagy nehezen tudó felnőtteket neveljenek, akkor meggyőződésünk, hogy ezt a folyamatot csak pozitív diszkriminációval, az ilyen iskolák számára nyújtott többlet segítséggel és anyagi támogatással lehet megfordítani.

(Gyakorló kisgyermekes szülőként azért is fontosnak tartottam ebben a témában megszólalni, mivel meglátásom szerint sajnos már az óvodában is megjelennek ennek a kedvezőtlen tendenciának a jelei. Ennek leküzdését viszont a pedagógus csak a vezetéssel és az önkormányzattal karöltve tudja megvalósítani.)

Egyébként a Monitor '91 vizsgálatból leszűrt tapasztalatoknak megfelelően kísérletünk során mi is az eredményesség csökkenését tapasztaltuk. Amíg ugyanis 1983-ban a diákok feladatmegoldása 61,5%-os volt, addig nálunk ugyanaz a korosztály csak 58,8%-ra teljesített. Miután azonban a romlás egyértelműen a 3. feladatra vezethető vissza, így ebből számottevő következtetés nem vonható le. Úgy gondoljuk, hogy ennek ellenére a felmérés olyan hasznos tapasztalatokkal szolgált, amelyek miatt érdemes volt ezt újra megismételni.

Irodalom

[1] Az Országos Közoktatási Intézet Értékelési Központjának jelentése a tanulók tudásszintjéről. Új Pedagógiai Szemle, 1992. 4. sz.

[2] Vári Péter: Természettudomány. (A Monitor '93 felmérés eredményei.) Új Pedagógiai Szemle, 1994. 7–8. sz.

[3] Dr. Révész Józsefné–Dr. Sümegi Lászlóné: Év végi felmérés az általános iskola 8. osztályában. A Matematika Tanítása, 1984. 2. sz.

Megjegyzés

Ezt a cikket a kedves ismerősnek és nagyra becsült kollégának, Dr. Sümegi Lászlónénak, volt szaktanácsadónak, több cikk és tankönyv szerzőjének, illetve társszerzőjének, versenyek szervezőjének, de főképp a kiváló pedagógusnak a tiszteletére állítottam össze (Dr. Révész J.-né és dr. Sümegi L.-né idézett írását felhasználva), aki néhány hónappal ezelőtt fájdalmasan hamar eltávozott közülünk. Emlékét megőrizzük.

Dr. Gerőcs László

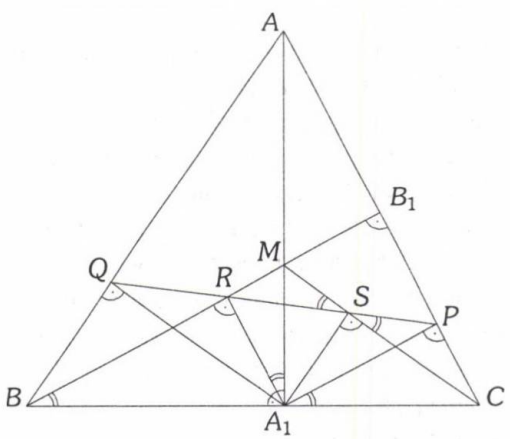
Azok a csodálatos húrnégyszögek

Nagy szívfájdalma sok középiskolai matematika tanárnak, hogy a tananyagban az elemi geometriára fordítható idő rendkívül szűkös. Már csak azért is nagy gond ez, mert tán éppen az elemi geometria az egyik terület, mely rendkívül jó lehetőséget nyújt a diákok fantáziájának, kreativitásának, absztrakciós készségének fejlesztésére. Talán csak matematika szakkörökön nyílik lehetőség arra, hogy a geometria olyan szép és diákfejjel is könnyen továbbgondolható területeit feldolgozzuk, melyek a tananyagba már nem férnek bele. Egy ilyen részterülete az elemi geometriának a húrnégyszögek világa.

Jelen cikkben a húrnégyszögekkel kapcsolatos néhány érdekességet szeretnénk megmutatni – hátha van, aki nem ismeri –, illetve a háromszöggel kapcsolatos néhány gondolatot, melyek részletezéséhez nagy segítségünkre lesznek a húrnégyszögek.

Foglalkozzunk legelőször egy a háromszög magasságpontjával kapcsolatos érdekes észrevétellel.

Legyen M az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja, A_1 az A-ból induló magasság talppontja. A_1-ből az AC, AB, MC, MB szakaszokra állított merőlegesek talppontja rendre P, Q, S, R (ld. 1. ábra). Megmutatjuk, hogy ekkor P, Q, S, R pontok egy egyenesre illeszkednek.



1. ábra

Ahhoz, hogy belássuk: Q, R, S, P pontok egy egyenesre illeszkednek, elegendő belátnunk, hogy

$$MSR\sphericalangle = PSC\sphericalangle \text{ ill. } MRS\sphericalangle = QRB\sphericalangle.$$

Az ábrán meglehetősen sok húrnégyszöget fedezhetünk fel. A_1CPS húrnégyszög, hiszen A_1C oldal P-ből és S-ből is derékszögben látszik. Ezek szerint az azonos íven nyugvó kerületi szögek tétele miatt

$$PSC\sphericalangle = PA_1C\sphericalangle.$$

Mivel BB_1 az ABC háromszögnek egy magassága, ezért BB_1 párhuzamos PA_1-gyel, így

$$PA_1C\sphericalangle = B_1BC\sphericalangle.$$

Az MBA_1 derékszögű háromszögnek A_1R átfogóhoz tartozó magassága, így $RA_1M\sphericalangle$ és $RBA_1\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek, vagyis

$$RA_1M\sphericalangle = R\,BA_1\sphericalangle.$$

Mivel RA_1SM húrnégyszög, hiszen két szemközti szöge derékszög, így

$$RA_1M\sphericalangle = RSM\sphericalangle,$$

hiszen mindketten az RM húron nyugvó kerületi szögek.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$PSC\sphericalangle = PA_1C\sphericalangle = MBA_1\sphericalangle = \\ = RA_1M\sphericalangle = RSM\sphericalangle,$$

vagyis R, S, P pontok egy egyenesbe esnek.

Teljesen hasonló módon: BA_1RQ húrnégyszög, mert BA_1 R-ből és Q-ból is derékszögben látszik, ezért

$$QRB\sphericalangle = QA_1B\sphericalangle.$$

De

$$QA_1B\sphericalangle = MCB\sphericalangle,$$

hiszen A_1Q és MC párhuzamosak. Az MA_1C derékszögű háromszögben

$$MCA_1\sphericalangle = SA_1M\sphericalangle,$$

innen pedig SA_1RM húrnégyszögben

$$SA_1M\sphericalangle = SRM\sphericalangle.$$

Ezek szerint

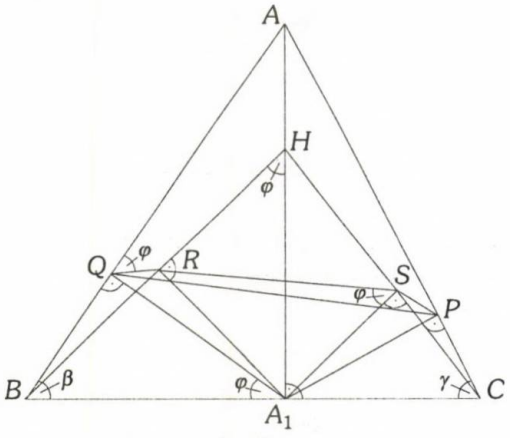
$$QRB\sphericalangle = QA_1B\sphericalangle = MCA_1\sphericalangle = \\ = SA_1M\sphericalangle = SRM\sphericalangle,$$

azaz Q, R, S pontok ugyancsak egy egyenesre illeszkednek.

Mivel – mint láttuk – R, S és P pontok egy egyenesen vannak, most beláttuk, hogy Q, R és S pontok is egy egyenesen vannak, így valóban: Q, R, S és P pontok egy egyenesre illeszkednek.

Vajon hogyan változik a Q, R, S, P pontok helyzete, ha nem a háromszög M magasságpontjából, hanem az AA_1 magasság egy tetszőleges H pontjából indulunk ki? Pontosabban: legyen H az ABC hegyesszögű háromszög AA_1 magasságának tetszőleges, a magasságponttól különböző pontja. A_1-ből CA, CH, BA és BH szakaszokra állított merőlegesek talppontjai legyenek rendre P, S, Q, R. Mit állíthatunk $PSRQ$ négyszögről?

Megmutatjuk, hogy e négyszög húrnégyszög. Tekintsük a 2. ábrát, melyen RSA_1 szöget φ-vel, az ABC hegyesszögű háromszög szögeit pedig a szokásos módon jelöltük.



2. ábra

Mivel A_1CPS húrnégyszög – hiszen A_1 és C pontok P-ből és S-ből egyaránt derékszögben látszanak –, ezért

$$A_1SP\sphericalangle = 180° - \gamma,$$

tehát

$$(1)\ RSP\sphericalangle = 180° - \gamma + \varphi.$$

Az RA_1SH négyszög ugyancsak húrnégyszög, hiszen két szemközti szöge derékszög, így az azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlősége miatt

$$RHA_1\sphericalangle = \varphi.$$

De az A_1BH derékszögű háromszögben A_1R az átfogóhoz tartozó magasság, ezért

$$BA_1R\sphericalangle = RHA_1\sphericalangle = \varphi.$$

A BA_1RQ négyszög megint csak húrnégyszög – BA_1 R-ből és Q-ból is derékszögben látszik –, tehát

$$BQR\sphericalangle = 180° - \varphi,$$

azaz

$$AQR\sphericalangle = \varphi.$$

Most megmutatjuk, hogy $BCPQ$ szintén húrnégyszög. Ugyanis az A_1AC derékszögű háromszögben

$$A_1AC\sphericalangle = 90° - \gamma,$$

így a QA_1PA nyilvánvaló húrnégyszögben

$$PQA_1\sphericalangle = 90° - \gamma,$$

tehát

$$PQB\sphericalangle = 90° - \gamma + 90° = 180° - \gamma.$$

Ezek szerint a vizsgálandó QPSR négyszögben

$$RQP\sphericalangle = 180° - (180° - \gamma + \varphi) = \gamma - \varphi.$$

Ezt (1)-gyel egybevetve kaptuk, amit bizonyítani akartunk, hogy $QPSR$ valóban húrnégyszög.

Megjegyzések. A bizonyítás során lényegesen kihasználtuk, hogy H pont – „szemmel láthatóan" – az M magasságpont és a háromszög A csúcsa között helyezkedik el. Ha a H pont M és A_1 között van, a bizonyítás gondolatmenete pontosan megegyezik a fent ismertetettel; ennek meggondolását az olvasóra bízzuk. Érdemesnek látszik még annak is utánajárni, hogyan alakul a P, R, Q, S pontok helyzete, ha H pont az AA_1 magasság egyenesének tetszőleges pontja.

A bizonyítás során nagyon sok húrnégyszöget fedeztünk fel az ábrán, de tüzetesebb elemzés után még egyéb húrnégyszögeket is találhatunk. Az

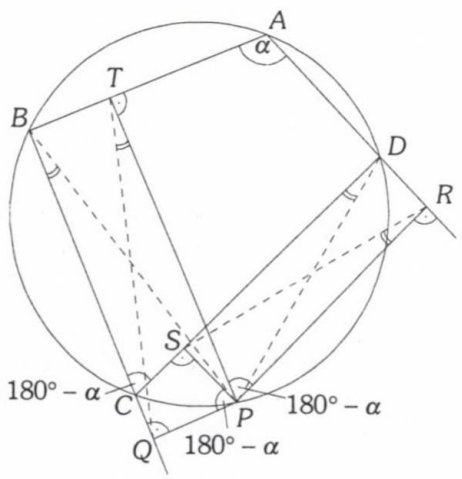
$$A_1CPS,\ BA_1RQ,\ AQA_1P,\ QPSR,\ HRA_1S,$$
$$AHSP,\ AQRH,\ BCPQ \text{ négyszögek}$$

mind-mind húrnégyszögek, és ez számtalan új „felfedezéshez" vezethet el bennünket.

A következő probléma vizsgálatához induljunk ki a háromszög ún. Simpson-egyeneséből. Ismert, hogy ha a háromszög köré írható körének tetszőleges pontjából merőlegeseket állítunk a háromszög oldalegyeneseire, akkor e merőlegesek talppontjai egy egyenesre illeszkednek; ezt nevezzük a háromszög kérdéses ponthoz tartozó Simpson-egyenesének.

Érdemesnek látszik megvizsgálni a kérdést: vajon jutunk-e valamilyen eredményre, ha nem háromszögből, hanem négyszögből indulunk ki. Természetesen csak olyan négyszög jöhet szóba, melynek van köréírható köre, azaz húrnégyszögből. Tehát: állítsunk merőlegeseket egy húrnégyszög köréírható körének tetszőleges P pontjából a húrnégyszög oldalegyeneseire, és vizsgáljuk meg közelebbről e merőlegesek talppontjait.

Elemezzük a 3. ábrát, melyen az $ABCD$ húrnégyszög oldalegyeneseire P-ből állított merőlegesek talppontjait R, S, T, Q-val jelöltük, és legyen α az A csúcsnál levő szög. Az rögtön szembetűnik, hogy e merőlegesek talppontjai – ellentétben a Simpson-egyenessel – nem esnek egy egyenesbe, de vizsgáljuk meg közelebbről e merőleges szakaszokat, hátha tudunk azért mondani valamit velük kapcsolatban.



3. ábra

Ismét nagyon sok húrnégyszöget fedezhetünk fel az ábrán. $ATPR$, $PRDS$, $PSCQ$, $PTBQ$ négyszögek mindegyike húrnégyszög, hiszen mindegyikben találhatunk szemközti derékszögeket.

Miután $ABCD$ húrnégyszög, ezért

$$DCB\sphericalangle = 180° - \alpha,$$

vagyis

$$SCQ\sphericalangle = \alpha.$$

De $SCQP$ ugyancsak húrnégyszög, tehát

$$SPQ\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

Az $ATPR$ húrnégyszögben

$$TPR\sphericalangle = 180° - \alpha,$$

tehát

$$SPQ\sphericalangle = RPT\sphericalangle.$$

Ha most ezen egyenlő szögekhez hozzáadjuk $SPT\sphericalangle$-et, nyilván egyenlő szögeket kapunk, azaz

$$RPS\sphericalangle = TPQ\sphericalangle$$

Vizsgáljuk most a $PRS\sphericalangle$-et!

$$PRS\sphericalangle = PDS\sphericalangle,$$

hiszen $PRDS$ húrnégyszögben azonos íven nyugvó kerületi szögek. De

$$PDS\sphericalangle = PDC\sphericalangle = PBC\sphericalangle,$$

hiszen utóbbiak az eredeti körben a PC húron nyugvó kerületi szögek.

A $TBQP$ húrnégyszögben viszont

$$PBQ\sphericalangle = PTQ\sphericalangle,$$

mert azonos íven nyugvó kerületi szögek.

Arra jutottunk tehát, hogy

$$PRS\sphericalangle = PDS\sphericalangle = PDC\sphericalangle = \\ = PBQ\sphericalangle = PTQ\sphericalangle.$$

Ezek szerint PRS és PTQ háromszögek két-két szöge egyenlő, így e két háromszög hasonló. Írhatjuk tehát

$$\frac{PS}{PR} = \frac{PQ}{PT}$$

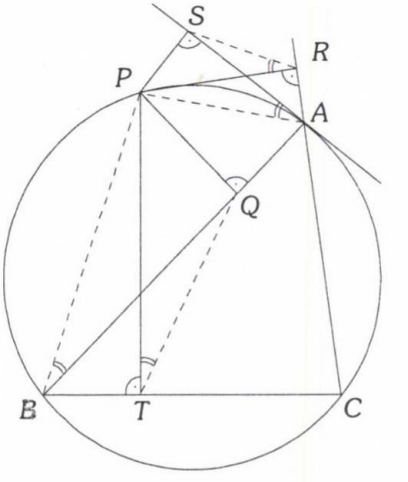
azaz

$$PS \cdot PT = PR \cdot PQ.$$

Kaptuk a következő eredményt. A húrnégyszög köréírható körének tetszőleges pontjából a húrnégyszög szemközti oldalegyeneseire állított merőleges szakaszok szorzata egyenlő.

Játsszunk most kicsit e problémakörrel. Képzeljük el, hogy a húrnégyszög két szomszédos csúcsát közelítjük egymáshoz a köréírható körön. Határesetben – amikor is a két csúcspont egybeesik, tehát húrnégyszögünk háromszögbe megy át – a két csúcsot összekötő oldal a kérdéses pontba húzott érintőbe megy át. Így az lehet a sejtésünk, hogy a háromszög köréírható körének tetszőleges pontjából valamely oldal egyenesére és a szemközti csúcsba húzott érintőre állított merőleges szakaszok szorzata egyenlő a másik két oldal egyenesére állított merőleges szakaszok szorzatával. Próbáljuk ezt belátni!

Tekintsük a 4. ábrát! A P pontból a BC oldalra, ill. a szemközti A csúcsban húzott érintőre állított merőlegesek talppontja T, ill. S, a másik két oldalegyenesre állított merőlegesek talppontja R és Q.



4. ábra

Azt akarjuk megmutatni, hogy

$$PT \cdot PS = PR \cdot PQ.$$

vagy másképpen

$$\frac{PT}{PQ} = \frac{PR}{PS}$$

Ez az aránypár azt sejteti velünk, próbáljuk belátni, hogy PTQ és PRS háromszögek hasonlók.

Az ábrát elemezve meglehetősen sok húrnégyszöget fedezhetünk fel. Az $ARSP$ négyszög húrnégyszög, hiszen AP szakasz R és S pontokból egyaránt derékszögben látszik. Így

az azonos íven nyugvó kerületi és középponti szögek tétele miatt

$$SRP\sphericalangle = SAP\sphericalangle.$$

De $SAP\sphericalangle$ az ABC háromszög köréírható körének egy érintőszárú kerületi szöge, ezért

$$SAP\sphericalangle = PBA\sphericalangle.$$

A $PBTQ$ négyszög szintén húrnégyszög, hiszen a T és Q pontok illeszkednek a PB szakasz Thalész-körére, így

$$PBQ\sphericalangle = PTQ\sphericalangle.$$

Arra jutottunk tehát, hogy

$$SRP\sphericalangle = SAP\sphericalangle = PBA\sphericalangle = \\ = PBQ\sphericalangle = PTQ\sphericalangle,$$

tehát az SRP és PTQ háromszögek egy-egy szöge egyenlő.

Most hasonlóképpen járhatunk el $SPR\sphericalangle$ esetében. Az $ARSP$ húrnégyszögben

$$SPR\sphericalangle = SAR\sphericalangle.$$

De $SAR\sphericalangle$ csúcsszöge az A csúcsnál levő, AC íven nyugvó érintőszárú kerületi szög, ezért

$$SAR\sphericalangle = ABC\sphericalangle = QBT\sphericalangle,$$

a $BTQP$ húrnégyszögben pedig

$$QBT\sphericalangle = QPT\sphericalangle.$$

Ezek szerint

$$SPR\sphericalangle = SAR\sphericalangle = QBT\sphericalangle = QPT\sphericalangle.$$

Arra jutottunk tehát, hogy SRP és PTQ háromszögek két-két szöge egyenlő, így a két háromszög valóban hasonló. A megfelelő aránypár:

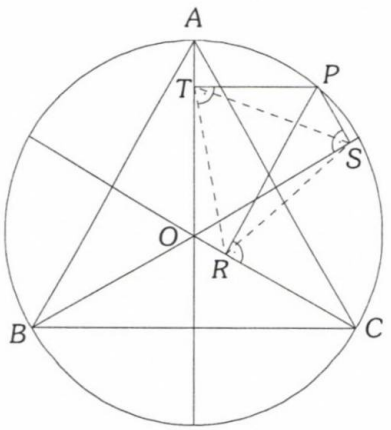
$$\frac{PT}{PQ} = \frac{PR}{PS}$$

így sejtésünk helyes volt, valóban

$$PT \cdot PS = PQ \cdot PR.$$

Írásunk legvégén a szabályos sokszögek egy érdekes tulajdonságának vizsgálatához hívjuk segítségül a húrnégyszögeket.

Bemelegítésként állítsunk merőlegeseket egy szabályos háromszög köréírható körének egy tetszőleges P pontjából a háromszög szimmetriatengelyeire és vizsgáljuk meg e merőlegesek talppontjai alkotta háromszöget. Tekintsük az 5. ábrát, melyen az ABC szabályos háromszög köréírható körének egy P pontjából a szimmetriatengelyekre állított merőlegesek talppontjait T, R, S-sel, a köréírható kör középpontját O-val jelöltük.



5. ábra

Mivel PO szakasz T, R és S pontokból egyaránt derékszögben látszik, ezért T, R és S pontok illeszkednek PO szakasz Thalész-körére, azaz P, T, O, R, S pontok mindannyian egy kö-

rön vannak. Ekkor viszont az azonos íven nyugvó kerületi szögek tétele miatt

$$TRS\sphericalangle = TOS\sphericalangle = 60°,$$

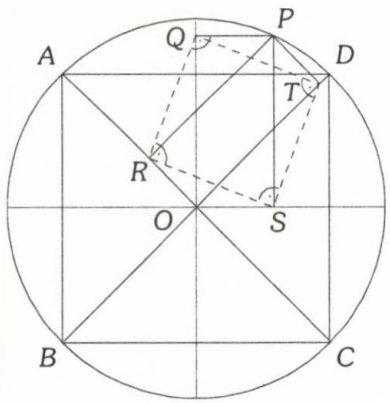
valamint

$$STR\sphericalangle = SOR\sphericalangle = 60°.$$

Ezek szerint STR háromszögnek van két 60°-os szöge, tehát e háromszög szabályos. Így arra jutottunk, hogy a szabályos háromszög köréírható körének tetszőleges P pontjából a háromszög szimmetriatengelyeire állított merőlegesek talppontjai ugyancsak szabályos háromszöget alkotnak. A bizonyításból az is világos, hogy a keletkezett STR szabályos háromszög köréírható körének átmérője az eredeti ABC háromszög köréírható körének a sugara, így a két háromszög hasonlóságának aránya 1 : 2.

Vajon hogyan alakul ugyanez a kérdés szabályos négyszögből, azaz négyzetből kiindulva?

A 6. ábrán az $ABCD$ négyzet köréírható körének egy P pontjából állítottunk merőlegeseket a négyzet szimmetriatengelyeire; ezek talppontjai T, Q, R, S.



6. ábra

Ugyanúgy, mint a szabályos háromszög esetében, most is elmondhatjuk, hogy a PO szakasz T, Q, R és S pontokból derékszögben látszik, így ez esetben is igaz, hogy P, Q, R, O, S, T pontok egy körön vannak. E körben a $QRST$ négyszög egyes oldalaihoz tartozó kerületi szögekre

$$TOS\sphericalangle = 45°,$$
$$RPS = 180° - ROS\sphericalangle = 180° - 135° = 45°,$$
$$QOR\sphericalangle = 45°,\ QOT\sphericalangle = 45°.$$

Tehát $QRST$ húrnégyszög oldalai egyenlők, így e négyszög négyzet.

Ugyanarra az eredményre jutottunk, mint a szabályos háromszög esetében: ha a négyzet köréírható körének tetszőleges P pontjából merőlegeseket állítunk a négyzet szimmetriatengelyeire, e merőlegesek talppontjai szintén négyzetet alkotnak, mely négyzetnek az eredeti négyzettel vett hasonlósági aránya 1 : 2.

Könnyen ellenőrizhetjük – a már ismertetett gondolatmenettel –, hogy ugyanerre az eredményre jutunk szabályos ötszög, ill. hatszög esetében is. Ezek után az lehet a sejtésünk, hogy e tulajdonság tetszőleges oldalú szabályos sokszögre is igaz, vagyis ha valamely n oldalú szabályos sokszög köréírható körének tetszőleges pontjából merőlegeseket állítunk a sokszög szimmetriatengelyeire, e merőlegesek talppontjai ugyancsak n oldalú szabályos sokszöget alkotnak, és e két sokszög hasonlósági aránya 1 : 2.

Hogy e mélyebb tétel igaz, vagy sem, nos, akinek kedve van, járjon utána!

Dr. Urbán János

A XXVII. Országos Kalmár László Matematika Verseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület – a TIT Szövetségi Iroda támogatásával – 1998. június 24–26-ig rendezte meg Vácott a 27. Kalmár László Matematika Verseny döntőjét. A két fordulóban 104 5., 6., 7. és 8. osztályos tanuló vett részt a döntőn, azok, akik a megyei fordulóban a legjobbaknak bizonyultak.

Az egyes osztályokban a legjobb eredményt a következő tanulók érték el:

5. osztály

1. *Steller Gábor* (Budapest, ELTE Radnóti Gimn. Tanára: Morvai Éva)
2. *Szabó István* (Körmend, Olcsai Kiss Zoltán Általános Isk. Tanára: Kramli Imréné)
3. *Seres Gyula* (Nyírkáta, Általános Isk. Tanára: Pető Lajos)

6. osztály

1. *Bauer Péter* (Szombathely, Bolyai Általános Isk. Tanára: Hollerné Gazdag Ilona)
2. *Maga Péter* (Nyíregyháza, Apáczai Gyakorló Általános Isk. Tanárai: dr. Gát Györgyné és Róka Sándor)
3. *Rácz Béla* (Budapest, Szilágyi Erzsébet Gimn. Tanára: Benedek Ilona)

7. osztály

1. *Backhausz Ágnes* (Budapest, Fazekas M. Gimn. Tanára: Kovács Csongorné)
2. *Csóka Endre* (Debrecen, Fazekas M. Gimn. Tanára: Balázs Tivadar)
3. *Jankó András* (Szeged, Tisza-parti Általános Isk. Tanára: Kothencz Jánosné)

8. osztály

1. *Harangi Viktor* (Budapest, Fazekas M. Gimn. Tanárai: Fazakas Tünde, Vincze Márta és Pósa Lajos)
2. *Béky Bence* (Budapest, Fazekas M. Gimn. Tanárai: Fazakas Tünde, Vincze Márta és Montágh Balázs)
3. *Gerencsér Balázs* (Budapest, Fazekas M. Gimn. Tanárai: Fazakas Tünde, Vincze Márta és Pósa Lajos)

Az országos döntő két napján a Reiman István vezetésével dolgozó versenybizottság a következő feladatokat tűzte ki:

Ötödik osztály

1. nap

1. Az Egyesült Államokban például 1998. június 2-át így rövidítik: 6/2/98, Angliában pedig így: 2/6/98. Ez bizonyos dátumoknál kétértelműséget okoz. Egy évben hány olyan nap van, amelynek dátumát kétféleképpen is lehet értelmezni, ha nem tudjuk, hogy melyik országban írták?

2. Egy kocka 6 lapja közül 2-t pirosra, 2-t kékre, 2-t sárgára akarunk festeni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha az elmozgatással fedésbe vihető kockákat azonosnak tekintjük?

3. Az *a, b, c, d* betűk egymást követő számjegyeket jelölnek növekvő sorrendben. Ismerjük

a következő három négyjegyű szám összegét:

$$\begin{array}{r} \overline{abcd} \\ + \quad \overline{dcba} \\ \overline{xyuv} \\ \hline 12300 \end{array}$$

ahol x, y, u és v ugyancsak az a, b, c, d számjegyek valamilyen sorrendben. Mennyi az $\overline{xyuv}$ értéke?

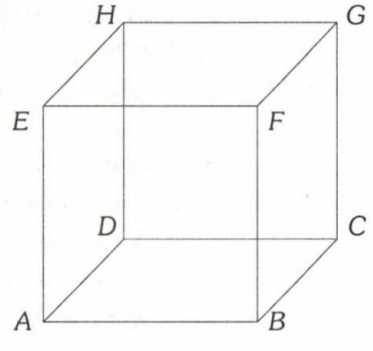
4. Egy teremben 30 ember gyűlt össze. Vannak közöttük olyanok, akik ismerik egymást, és olyanok is, akik nem (az ismerhetőség kölcsönös). Mutassuk meg, hogy a 30 ember között van 2 olyan, akiknek a teremben azonos számú ismerőse van!

2. nap

1. Hányféleképpen rendezhetők át a „VAKÁCIÓ" szó betűi úgy, hogy a magánhangzók sorrendje változatlan maradjon?

2. A 20-nál nem nagyobb pozitív egész számok közül hányféleképpen választhatunk ki 2-t úgy, hogy az összegük páratlan szám legyen?

3. A képen látható kocka élvázát akarjuk drótból elkészíteni. Minél kevesebb helyen akarunk forrasztani. Legkevesebb hány darab drót kell hozzá? Legalább hány darab drótra van szükség akkor, ha a kocka élvázával együtt a testátlóit *(AG, BH, CE, DF)* is elkészítjük?



4. A csillagok helyén álló számjegyek elmosódtak. Határozd meg ezeket a következő osztásban:

$$2 * * 1 : 13 = * 2 *.$$

(az osztáskor a maradék nulla!)

Hatodik osztály
1. nap

1. Hányféleképpen választhatunk ki három különböző, 30-nál nem nagyobb pozitív egész számot úgy, hogy az összegük páros legyen?

2. Vannak-e négyzetszámok a következő sorozatban?

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots$$

3. Melyek azok a tízes számrendszerben felírt háromjegyű számok, amelyekre igaz, hogy egyenlők számjegyeik összegének 12-szeresével?

4. Mutassuk meg, hogy egy téglalapot fel lehet darabolni n téglalapra úgy, hogy a darabok közül semelyik kettő sem alkot (az eredeti helyén) egy téglalapot, ha $n = 5, 6, 7$ és 8!

Hatodik osztály
2. nap

1. Van 23 darab kártyánk, amelyekre felírtuk a pozitív egész számokat 1-től 23-ig. Két csoportra akarjuk osztani a kártyákat, úgy, hogy az egyik csoportba tartozókra írt számok összege 17-tel legyen nagyobb a másik csoportba rakott kártyákra írt számok összegénél. Megoldható-e ez a csoportosítás?

2. Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben csak 2 különböző számjegy fordul elő?

3. Az A és B pontok az e egyenes különböző oldalain vannak, e-től különböző távolságra. Az e egyenes melyik P pontjára igaz, hogy az AP és BP távolságok különbsége a legkisebb?

4. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek fele egy egész szám négyzete, ötöde pedig egy egész szám köbe (harmadik hatványa)?

Hetedik osztály
1. nap

1. Három pozitív egész szám összege egyenlő a három szám szorzatával. Mik lehetnek ezek a számok? Az összes megoldást keresd meg!

2. Egy húrtrapézt az egyik átlója két egyenlőszárú háromszögre bont. Számítsuk ki a trapéz szögeit!

3. Igaz-e, hogy a következő számok mindegyike felírható két, egymást követő pozitív egész szám szorzataként?

12,
1122,
111222,
11112222,
...

4. Egy derékszögű háromszög oldalainak hosszát összeszoroztuk, és pontosan kétszeresét kaptuk annak, amit akkor kaptunk, amikor a háromszög magasságainak hosszát szoroztuk össze. Mekkorák a háromszög hegyesszögei?

5. Adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_8$ és a $b_1, b_2, \ldots b_8$ számok. Ezekből képezzük az összes $a_i + b_j$ alakú számot ($i, j = 1, 2, \ldots, 8$). Mutassuk meg, hogy az így kapott 64 számot 8 csoportra lehet bontani úgy, hogy a számok összege mind a 8 csoportban ugyanannyi!

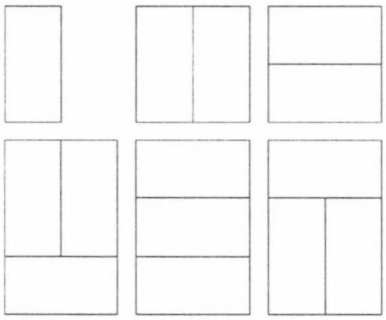
Hetedik osztály
2. nap

1. Hány olyan (x, y) számpár van, ahol $x < 0$, $y > 0$, x és y egészek, továbbá kielégítik a következő egyenletet:

$$111x - 37y + 1998 = 0?$$

2. Adott egy szakasz, amelyről tudjuk, hogy egy szabályos tizenkétszög oldala. Szerkesszük meg a sokszög köré írható kör sugarát! (Elég leírni a szerkesztés menetét!)

3. A dominók 1×2-es téglalapok. Egybevágó dominókból rakunk ki $n\times2$-es téglalapokat. Például az 1×2-est egyféleképpen, a 2×2-est kétféleképpen, a 3×2-est háromféleképpen lehet kirakni:



Hányféleképpen lehet kirakni a 10×2-es és a 11×2-es téglalapokat?

4. Két különböző kétjegyű prímszámot egymás után írtunk, és az így kapott négyjegyű szám osztható a két prímszám számtani közepével. Mik lehetnek a kétjegyű prímszámok?

Nyolcadik osztály
1. nap

1. Igazoljuk, hogy a következő két szám legnagyobb közös osztója 1:

$$1998 \cdot 1999 \text{ és } 1998^{1999} + 1999^{1998}.$$

2. Egy egységnyi oldalú négyzet középpontján áthalad egy *e* egyenes. Számítsuk ki a négyzet csúcsainak *e*-től mért távolságai négyzetének összegét!

3. Igazoljuk, hogy a 2 felírható 1998 darab különböző pozitív egész szám reciprokának összegeként!

4. Egy szabályos kilencszög minden csúcsát befestettük vagy pirosra, vagy kékre. Ha a kilencszög három csúcsát kiválasztjuk és mindhárom csúcs piros, akkor azt mondjuk, hogy az piros háromszög. Ha mindhárom csúcs kék, akkor az kék háromszög. Igazoljuk, hogy vagy van két különböző egybevágó piros, vagy van két különböző egybevágó kék háromszög!

5. Mennyi a

$$\sqrt{x^2+(32-y)^2}+\sqrt{(24-x)^2+y^2}$$

kifejezés legkisebb értéke, ha x és y nem-negatív valós számokat jelölnek?

Nyolcadik osztály
2. nap

1. Határozzuk meg mindazokat a kétjegyű A számokat, amelyeknek bármelyik pozitív egész kitevőjű hatványának utolsó két jegyéből álló szám A!

2. Egy téglatest testátlója a vele egy csúcsból induló 3 éllel rendre α, β és γ szöget zár be. Igazoljuk, hogy $\alpha + \beta + \gamma < 180°$

3. Egy táblára felírták 1-től 20-ig a pozitív egész számokat. Igazoljuk, hogy bárhogyan is választunk ki ezek közül 10-et, a kiválasztottak között mindig van 4 olyan szám, amelyek közül 2 összege megegyezik a másik kettő összegével!

4. Egy trapéz két párhuzamos oldalának hossza a és b. Egy ezekkel párhuzamosan húzott egyenesnek a trapézba eső szakaszát a trapéz átlói három egyenlő szakaszra bontják. Milyen hosszú ez a trapézba eső szakasz?

A Kalmár László verseny megyei fordulójának feladatai:

Ötödik osztály

1. Egy ládából Bence egyik nap kiveszi az almák egyharmadát. Másnap újra kiveszi a még ládában maradt almák egyharmadát. Harmadik nap újra kiveszi a megmaradt almák egyharmadát. Így végül 8 alma maradt a ládában. Hány alma volt eredetileg benne?

2. Egy apa 70. születésnapjának megünneplésére összejött mind a 6 fia. A fiúk közti korkülönbség 4-4 év és a legidősebb kétszer annyi éves, mint a legfiatalabb. Hány évesek a fiúk?

3. Van 36 darab egyforma (egybevágó) fakockánk. Hány különböző tömör téglatestet lehet ezekből építeni, ha egy-egy téglatesthez mindet fel kell használni?

4. A következő szorzásban a *-ok helyén álló számjegyek elmosódtak:

$$*2* \cdot 13 = 2**1.$$

Határozd meg a hiányzó számjegyeket!

Hatodik osztály

1. Az Óperenciás tenger egy kis szigetén kétféle állat él. A negyvenlábúak, ezeknek egy feje van és a hétfejű sárkányok. A szigeten élő állatoknak összesen 54 feje és 298 lába van. Hány lábuk van a hétfejű sárkányoknak?

2. Két mutató közös tengely körül forog egyenletesen. Az egyik 12 perc alatt, a másik 16 perc alatt fordul körbe. Most mindkettő a skála

0 pontjára mutat. Hány perc múlva fordul ez újra elő?

3. Igaz-e, hogy bármely konvex hatszögben van két olyan átló, amelynek az egyenesei legfeljebb 20°-os szöget zár be egymással? Állításodat indokold meg!

4. Egy négyzet alakú 3×3-as táblázat minden sorába írjuk be az 1, 2, 3 számokat úgy, hogy minden oszlopba is különböző számok kerüljenek. Hányféleképpen lehet így kitölteni a táblázatot?

Hetedik osztály

1. Barnabás arra a kérdésre, hogy hány óra van, cselesen válaszolt: „Az éjféltől eddig eltelt idő fele pontosan annyi, mint a délig még hátralevő idő háromnegyede." Hány óra van most?

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának P pontját merőlegesen vetítjük az AC befogóra, így a Q pontot kapjuk, ha pedig merőlegesen vetítjük a BC befogóra, úgy az R pontot kapjuk. Melyik P pontra igaz, hogy a QR távolság a lehető legkisebb?

3. Lehet-e egy pozitív egész szám négyzete a következő szám:

$$1998^{15} + 2\,?$$

Állításodat indokold!

4. Hogyan lehet elhelyezni a síkon 6 pontot úgy, hogy ezek közül bármelyik hármat választjuk is ki, egyenlőszárú háromszöget alkotnak?

5. A pozitív egész számokat a következő „háromszög-táblázatba" írjuk fel:

				17 .
			10	18 .
		5	11	19 .
	2	6	12	20 .
1	3	7	13	21 .
	4	8	14	22 .
		9	15	23 .
			16	24 .
				25 .

A táblázat középső sora így kezdődik:

1, 3, 7, 13, 21...

Mi lesz ennek a középső sornak a 100. eleme?

Nyolcadik osztály

1. Egy matematikustól megkérdezte új munkatársa, hány évesek a gyerekei. A következő választ kapta: „A két fiam életkorának összegéhez hozzáadva életkoruk szorzatát, 23-at kapunk. Megjegyzem még, hogy mindkettő életkora páratlan prímszám." Hány évesek a gyerekek?

2. Egy derékszögű háromszög átfogójára (kifelé) szerkesztett szabályos háromszög területének a felével egyenlő a derékszögű háromszög területe. Számítsuk ki a derékszögű háromszög befogóinak arányát!

3. Tudjuk, hogy tíz pozitív egész szám összege 1998. Mennyi lehet legfeljebb a 10 szám legnagyobb közös osztója?

4. Válasszunk ki egy kétjegyű számot, például 13. Szorozzuk meg kettővel: 26; írjunk a kapott szám után egy 0-át: 260; a kapott számhoz adjuk hozzá a kiinduló számot: 273; az eredményt szorozzuk meg 481-gyel. Így a 131313 hatjegyű számhoz jutunk. Ha ugyanezt a műveletsort például a 37-re alkalmazzuk, akkor az eredmény: 373737. Magyarázd meg, miért kapjuk mindig ezt a „meglepő" eredményt!

5. Egy egységnyi élű kocka egyik testátlóján átfektetett síkok közül melyik metsz ki legkisebb területű négyszöget a kockából?

Surányi László

Algoritmusok a középiskolában: a mohó algoritmus

Bevezetés

A számítógépes civilizáció globálissá válása az algoritmikus gondolkodás térhódítását is jelenti. Minden tantárgy tanításánál az alapkérdések közé tartozik az, hogyan fogadtatjuk el a tantárgyat a diákokkal, melyek azok a területek, amelyek révén fel tudjuk kelteni a diákok érdeklődését tantárgyunk iránt, motiválttá tudjuk tenni őket a tantárgy tanulásában. Nyilvánvaló, hogy a matematikában ma ez a terület éppen a matematikának a számítástechnikával kapcsolatos része. Mindez megköveteli, hogy mi, matematika tanárok se térjünk ki az algoritmikus gondolkodás tanítása elől. Ezt tehetjük úgy is, hogy egyszerűen „kiszolgáljuk" a számítástechnika igényeit. Az alábbiakban azonban egy másik lehetőségre mutatok példákat.

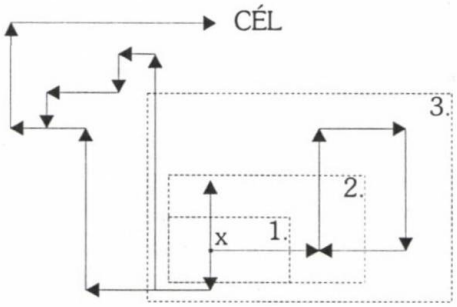
Az algoritmizálás hatékony eszköz, amit érdemes jól ismerni. De mint minden eszköznél, itt is az a fontos, hogy *jól ismerjük ne csak az eszközt, hanem a céljainkat is, és a céljainkhoz alkalmazzuk illetve fejlesszük ki az eszközöket, ne fordítva.* (Ez egyébként az egész tudományos-technikai korszituáció értékelésének is egyik kulcsa.) Példákat fogok mutatni arra, hogy *a matematikai gondolkodás fontos mozzanatainak elsajátításában jó eszköz lehet az algoritmikus gondolkodás fejlesztése.* Egy példa: Melyik matematikatanár ne ismerné azt a tehetetlenség-érzést, ami akkor fogja el, amikor még legokosabb tanítványaitól is, és többszöri magyarázat után is azt hallja egy-egy feladat megoldásánál, hogy „vegyük a legjobb esetet". Általános tapasztalat, hogy nehezen értik meg a diákok, hogy ezzel a gondolattal alapjaiban van probléma. Ez nem véletlen: gondolkodásunk általános és nagyon is emberi hibájáról van itt szó, amellyel a mindennapi életben is állandóan találkozunk. Mi is a probléma azzal, hogy „vegyük a legjobbat, vagy legkedvezőbbet"? Az, hogy amikor ezt mondjuk, nem ellenőrizzük, hogy kellő átlátásunk van-e az *egész* helyzetről, vagy csak egy helyi szempont alapján nevezünk valamit a legkedvezőbbnek. Könnyen lehetséges, hogy az, ami egy helyi vagy részleges szempontból a legkedvezőbbnek tűnik, az egész helyzet ismeretében nem a legkedvezőbb, sőt egyenesen katasztrófához is vezethet. Azt is mondhatnánk, hogy nagyon is emberi tulajdonság, hogy a nekünk éppen legkényelmesebbet vagy legkézenfekvőbbet könnyen összekeverjük a legjobbal. Számtalan közlekedési – és nemcsak közlekedési – fennakadásnak, dugónak az oka ez. Ha a legkedvezőbbet akarjuk elérni, nem a „mindig teljes gőzzel előre" a legjobb módszer, tudni kell, hogy mikor érdemes hátralépni, áldozatot hozni. Nem szellemeskedés, ha azt mondom: már a bűnbeesés története is foglalkozik a kérdéssel. Éva azt hiszi, hogy a kert közepén a tudás fája van, s így már a kígyónak könnyű elhitetnie, hogy érdemes enni róla, hiszen a kert közepén levő, tehát legértékesebb fáról érdemes enni... Csakhogy a kert közepén nem a tudás fája áll, hanem az örök élet fája.

Ez a „válasszuk mindig a legjobbat" gondolat valójában az algoritmusok egy nevezetes fajtáját, az ún. MOHÓ ALGORITMUSOKAT fedi. Nemcsak a matematika tanítását könnyítheti, hanem az általános emberi gondolkodás és szemléletmódot alakítja, ha tudatosítjuk ezt, és megtanítjuk a diákokat ennek az algoritmusfajtának az *értékelésére, elemzésére.*

A mohó algoritmus elemzésére azért is szükség van, mert a mohó algoritmus sok esetben hatékony eszköz. De tudnunk kell, és a diákokkal is ezt kell megértetnünk, hogy nem bízhatunk benne vakon. Tudni kell, hogy mielőtt alkalmazom, meg kell vizsgálnom, hogy most épp alkalmazható-e. Ha jól ismerjük a hatókörét, akkor a matematikatanítás céljainak érdekében tudjuk használni: rá tudunk mutatni, hogy hatóköre korlátozott. Minél jobban elemezzük a diákokkal különböző feladatokban a mohó algoritmus erejét és gyengéjét, annál jobban beléjük ültetjük a kritikai magatartást, és még azt is elérhetjük, hogy ők maguk bírálják meg, ha valaki minden további nélkül „a legjobb esetet" akarja venni.

A mohó algoritmus elemzése több vonatkozásban is izgalmas kérdésekhez vezet. Látni fogjuk, hogy néha valóban a legjobb eredményt adja, de van olyan is, amikor katasztrófához vezet, és fogunk látni példákat arra is, amikor nem adja az optimális megoldást, de mégis aránylag megnyugtató megoldást ad. (Az egész számítástechnika 90%-ban mohó algoritmusokat, vagy azok enyhe finomításait alkalmazza, ami azt is jelenti, hogy a „mesterséges intelligencia" előállításának törekvése mögött az a szándék áll, hogy az egész emberi intelligenciát csupa mohó algoritmusból akarja felépíteni.)

A mohó algoritmus destruálását, vagyis annak bemutatását, hogy a mohó algoritmusban nem bízhatunk vakon, kezdhetjük egyre bonyolultabb ábrák rajzolásával, ahol a CÉLhoz kell eljutni. Kijelölünk egy pontot, ahonnan közvetlenül a CÉL felé indulva ciklusba jutunk, vagy zsákutcába, vagy jóval hosszabb útra kényszerülünk, mint ha a CÉLtól távolodva indulnánk el. Jó módszer lehet, ha nem az egész ábrát mutatjuk, csak egy részét, és úgy kérdezzük, hogy „mi a legjobb". Az alábbi ábrán az *x*-szel jelölt pontból kell a CÉLba eljutni. Az utak egyirányúak. Ha csak az első pályarészt látjuk, akkor nyilván felfelé indulni a „legjobb". Ha a második részt mutatjuk, akkor látszik, hogy ez zsákutca. Most az tűnik a „legjobbnak", ha jobbra indulunk. Ezért ha a második részt látjuk, akkor jobbra indulni a „legjobb", de ez végtelen ciklus. Ha most a harmadik részt látjuk, akkor látjuk, hogy ez viszont végtelen ciklusba vezet, tehát az egyetlen lehetőség, ha lefele indulunk. Most az tűnik a legjobbnak, ha ezután az első elágazásnál jobbra (felfele) fordulunk. Ha viszont az egész úthálózat felett van áttekintésünk, akkor látjuk, hogy még ez is kerülő: itt tehát kétszer is áldozatot kellett hoznunk ahhoz, hogy a lehető leggyorsabban CÉLhoz érjünk. Példánk tehát máris mutatja, hogy mi a baj a mohó algoritmussal. Néha nem tudunk jobbat, mert *nincs áttekintésünk, és nincs kihez fordulnunk tanácsért.* De ebből még nem következik, hogy biztos a „legjobbat" érjük el áttekintés és tanács nélkül. (A bűnbeesés történetben arról van szó, hogy lett volna kihez fordulni, de az ember rossz tekintélyhez fordult.) Érdemes számtalan ilyen feladatot és ábrát kitalálni és a diákokkal is rajzoltatni, akár már hetedikben is, mert ez *szemléletesen* mutatja a mohó algoritmus minden problémáját. Később, amikor absztraktabb szituációkban kerül elő a mohó algoritmus, van szemléletes hivatkozási alapunk arra, hogy miért nem bízhatunk benne.



Nemcsak a fenti példára, hanem a továbbiakban sorra kerülő feladatokra is igaz, hogy a magyar matematikatanításban az ilyen feladatok hagyományosan nem számítanak „komoly-

nak", holott a matematikai gondolkodás lényegére világítanak rá, a szemléletmód alakítását segítik.

Halmazrendszerek, gráfelméleti alapfeladatok

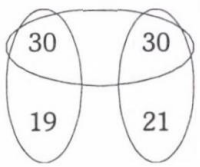
A következő feladat igen alkalmas arra, hogy sok oldalról körüljárjuk a mohó algoritmus összes gyengéit. Eközben számtalan esetben kell *ellenpéldát* gyártani és gyártatni, ami szintén nem szokásos a magyar matematikatanításban, holott e nélkül nincs igazi matematikai gondolkodás. Látszatra tehát destruálni fogunk, de *ez vezet a probléma mélyebb megértéséhez.*

A FELADAT hasonlít ahhoz, amikor egy iskola a fakultációs rendszerét szervezi, de egyszerűbb annál. Az iskolának a T_1, T_2..., T_m tanfolyamok megindítására van lehetősége. Előzetes felmérést készít: minden diák megjelölheti, hogy melyik tanfolyamok érdeklik. Minden diák köteles legalább egy tanfolyamot megjelölni, de megjelölhet többet is, akár az összeset is. Ezután az iskola eldönti, melyik tanfolyamokat indítja el. Az a célja, hogy *a lehető legkevesebb tanfolyamot indítsa meg*, de *minden* diák találjon őt érdeklő tanfolyamot. Egyelőre nincs felső korlát a tanfolyam létszámára

Érdemes a diákokkal megfogalmaztatnunk, hogy mit jelent ez esetben a mohó algoritmus. Ha minél kevesebb tanfolyamot akarunk indítani, akkor nyilván az a „legjobb", ha minél nagyobb tanfolyamokat indítunk. Először tehát azt a tanfolyamot kell megindítani, amelyre a legtöbben jelentkeztek. De mit csináljunk másodszor? Most már nyilván nem az a legkedvezőbb, ha megint a lehető legnagyobb tanfolyamot indítjuk meg, hiszen ennek lehet nagy az átfedése az elsővel. Az is lehet, hogy a legnagyobb tanfolyam ötvenfős, a második legnagyobb 45 fős, de ebből 35-en az elsőre is jelentkeztek; van viszont egy aránylag kisebb, 20 fős tanfolyam, amelyből senki nem jelentkezett az elsőre. Ekkor nyilván „kedvezőbb" ezt a tanfolyamot megindítani. Vagyis a második tanfolyamot úgy érdemes választani, hogy arra a lehető legtöbben járjanak azok közül, akik az elsőre nem jelentkeztek.

A mohó algoritmus általános lépését tehát egyelőre így fogalmazhatjuk meg: a már kiválasztott tanfolyamra jelentkezőket kipipáljuk, és ezután azt a tanfolyamot választjuk, amelyre a még „kipipálatlan" tanulók közül a legtöbben jelentkeztek.

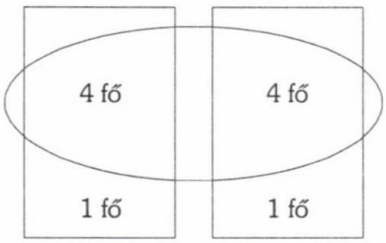
De vajon tényleg kiválasztja-e ez a módszer a lehető legkevesebb tanfolyamot? Minden lépésben a lehető legkedvezőbbet választottuk, tehát összességében is a legkedvezőbb jött ki? Érdemes ezt a kérdést feltenni, mert amelyik diák csak egy kicsit is elgondolkozik a kérdésen, rögtön talál rá ellenpéldát. Talán a legegyszerűbb ellenpélda ilyen alakú:



1. PÉLDA: Összesen száz tanuló van, és az ábrán látható eloszlásban jelentkeztek három meghirdetett tanfolyamra. A legnagyobb tanfolyam hatvanfős, a mohó algoritmus értelmében tehát ezt kell először megindítani. De a másik két tanfolyamot is meg kell indítani, hiszen vannak olyan tanulók, akik csak erre jelentkeztek. S valóban: a mohó algoritmus másodiknak azt a tanfolyamot választja ki, amelyre 21 még kipipálatlan tanuló jelentkezett, majd azt is kiválasztja, amelyre még 19 kipipálatlan jelentkezett. Vagyis: ha a mohó algoritmus szerint járunk el, akkor mind a három tanfolyamot ki fogjuk választani, holott nyilvánvaló elég lenne a két kisebb is. Íme, megint egy egyszerű példa

arra, hogy *mindenben a lehető legjobbat választjuk, a végeredmény mégsem a legjobb.*

De vajon mennyi a veszteségünk? Látszólag csak egy tanfolyamot indítottunk feleslegesen. De azt is mondhatjuk, hogy a veszteség 50%-os. S valóban, ha a tanulókat kisebb, mondjuk tízes tömbbe osztjuk, és mindegyik tömbnél felrajzolunk egy ilyen helyzetet, akkor a következő



2. PÉLDÁhoz jutunk. Ismét száz tanuló van. Tíz darab tanfolyamra nyolcan-nyolcan jelentkeztek, további húszra öten-öten, de ezekből négyen-négyen jelentkeztek egy-egy nyolcfős tanfolyamra is.

A mohó algoritmus ez esetben kiválasztja a tíz darab „nagy" tanfolyamot, hiszen ezekkel nyolc-nyolc még kipipálatlan tanulót „intéz el", és csak utána választja ki az öteleműeket, holott ezek már egymagukban is minden tanulót foglalkoztatnának. Itt tehát a minimum húsz tanfolyam lenne, ehelyett a mohó algoritmus harminc tanfolyamot indít meg. S miután ez a példa nyilván általánosan is alkalmazható, máris van olyan példánk, ahol az általános veszteség 50%. Holott minden lépésben a lehető legjobbat választottuk! (Megjegyzem, hogy az ilyen jellegű mérlegelés a nagyságrend fogalmát is érzékelteti legalábbis legegyszerűbb alakjában.)

A fenti példánál azonban „csaltunk"! Azt mondtuk, a mohó algoritmus először kiválasztja a tíz darab nagy tanfolyamot, de ez nem igaz arra az algoritmusra, amit mi eddig felírtunk. Ott ugyanis a legnagyobb tanfolyamot kell kiválasztani, márpedig itt *több* legnagyobb tanfolyam van. Erre az esetre az algoritmus nem ad utasítást, az algoritmus tehát nem csinálna semmit („lefagyna")! Ez is általános hibája annak a gondolatnak, hogy „vegyük a legjobbat": nem mindig egyértelmű, hogy melyik a legjobb, néha több legjobb is van. A mohó algoritmus fogalmához azt is hozzá szokták érteni, hogy ilyen esetben a szó szoros értelmében a legkézenfekvőbbet választjuk: a tanfolyamokat még az indulásnál megszámozzuk, és ha több legjobb van, akkor automatikusan a legkisebb sorszámút választjuk közülük. A fenti példánál teljesen mindegy, hogy hogyan vannak számozva, a végeredmény ugyanaz lesz. De látni fogjuk, hogy ez nem mindig van így.

Most már megfogalmazhatjuk végleges formában a mohó algoritmust, de előtte érdemes a feladatot is átfogalmazni az általánosabb kombinatorikai nyelvre.

A feladat a következő: Adott egy (véges) halmaznak (= a tanulók halmazának) néhány részhalmaza (= az egyes tanfolyamokra jelentkező tanulók halmazai). Ezek közül a részhalmazok közül ki kell választani *minimális* számút úgy, hogy azok együttesen már az egész halmazt *lefedjék*, vagyis a (tanulók) halmaz(ának) minden elemét tartalmazzák. A feladat tehát: megkeresni egy halmaz adott részhalmazrendszerének *minimális lefedő rendszerét.*

Megjegyezzük, hogy véges halmazról lévén szó, biztosan van minimális lefedő rendszer. Ennek megtalálására egy lehetséges eljárás az, hogy minden lehetséges részhalmazrendszert végigveszünk, és megnézzük, melyek lefedő rendszerek közülük, és ezek közül kiválasztjuk a legkevesebb részhalmazt tartalmazót. Ez azonban már húsz halmaz esetén is egymillió részhalmaz-rendszer végigvizsgálását követeli. Ennél sokkal gyorsabb a

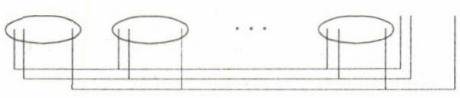
LEFEDŐ RENDSZERT KERESŐ MOHÓ ALGORITMUS, amely a következő:

LR1 *Az adott részhalmazokat sorszámozzuk. A „kipipálatlan elemek" halmaza kezdetben az egész halmaz.*

LR2 *Megkeressük az(oka)t a halmaz (oka)t, amelyekben a kipipálatlan elemek száma a legnagyobb, és kiválasztjuk a legkisebb sorszámút (ez helyes utasítás akkor is, ha csak egy ilyen van). A kiválasztott halmaz elemeit kipipáljuk, vagyis elhagyjuk a kipipálatlan halmazból. Ha a kipipálatlan elemek halmaza üres, akkor kész vagyunk, ha nem, akkor visszamegyünk LR2-höz.*

Ez az algoritmus ugyan egyszerűbb, de nem teljesíti elvárásunkat. Azt vártuk, hogy *minimális* lefedő rendszert választ ki, de láttuk, hogy ezt már aránylag egyszerű esetekben sem teszi meg, a veszteség akár 50%-os is lehet. Ha a helyzet kissé áttekinthetetlenebb, a veszteség is nőhet:

3. PÉLDA. Az alaphalmaz (= a tanulók halmaza) kilencven elemű. Felosztjuk kilenc tízelemű tömbre. A megadott részhalmazok közé felvesszük az első nyolc tízelemű tömböt, továbbá tíz darab „fésűszerű" halmazt, az első fésű minden tömb első eleméből áll, az *i*-edik fésű minden tömb *i*-edik eleméből. (Számokkal leírva az {1,2, ...,10}, {11,12, ...,20}, ..., {71,72,... ,80}, halmazokról van szó, továbbá minden $i = 1, 2, ..., 10$-re az $\{i, 10 + i, 20 + i, ..., 80 + i\}$ halmazról.) A struktúra tehát így néz ki:



Itt is szinte minden lépésben több legjobb van, de ez most is közömbös. Bármilyen sorrendben vannak is felsorolva a halmazok, mindig ugyanazt kapjuk: a mohó algoritmus kiválasztja (valamilyen sorrendben) a 8 db tízelemű halmazt, és utána minden 9 elemű halmazra is szüksége van az utolsó tíz elem lefedéséhez. Tehát a minimális 10 helyett 18-at választ ki, ez 80%-os veszteség.

Ismét érzékeltethetjük a nagyságrend fogalmát. Legyen a tanulók száma $45 \cdot 46 = 2070$. Ha ezt a példát 23 példányban egymás mellé tesszük, akkor ismét 80%-os a veszteség. Ha azonban arányosan felnagyítjuk a fenti példát, azaz 45-ös tömbökre osztjuk az alaphalmazt, a 8 tízelemű helyett 44 db 46 elemű halmazt veszünk kiindulásul és 46 darab 45 elemű „fésűt" veszünk hozzá (azaz 10 helyett most 46 az *n*) akkor a mohó algoritmus 90 halmazt választ ki a minimális 46 helyett, ami több mint 95%-os veszteség. Nagy *n*-ekre a példa a 100%-os veszteséghez tart. Ha az alaphalmaz $n(n - 1)$ elemű, ezt $n - 1$ tömbre bontjuk és a részhalmaz $n - 2$ db ilyen tömbből, valamint *n* db $(n - 1$ elemű) fésűből áll, akkor a minimális lefedő rendszer az *n* db fésű, míg a mohó algoritmus mind a $2n - 2$ halmazt kiválasztja, ami $n - 1$ veszteség, s ez majdnem 100%.

A 3. példa úgy is alakítható, hogy néhány tízelemű halmazra is szükségünk legyen: ha egy fésűből kihagyjuk az *i*-edik tömbbe harapó „fogát", akkor az *i*-edik tömbre is szükség van a lefedéshez. Minél több foga van kihagyva a fésűknek, annál nehezebben áttekinthető a helyzet. Ez már érzékelteti, hogy a mohó algoritmus „univerzálisan" nem javítható, annyi különböző esetre kellene külön-külön felkészülnie már ebben az egyszerű példában is.

Ekkal remélhetjük, hogy akad olyan „akadékoskodó", vagyis okos diák, aki megpróbálja megvédeni a mohó algoritmust. Példáink szerint csak az a baj vele, mondhatja, hogy olyan lefedő rendszert talál, amelyben vannak *feleslegesen* kiválasztott halmazok is. Vajon nem jutunk-e *minimális* lefedő rendszerhez, ha végigcsináljuk a lefedő rendszert kiválasztó mohó algoritmust, majd kibővítjük a következő lépéssel:

LR+ Miután kiválasztottuk a lefedő rendszert, hagyjuk el belőle a felesleges halmazokat, vagyis azokat, amelyeket más halmazok is lefednek.

Nagyon tanulságos javaslat! De mielőtt közelebbről megvizsgálnánk, először tisztázni kell, hogy most már nem arról van szó, hogy a „vegyük a legjobbat" módszerrel célhoz juthatunk, hanem arról, hogy miután ezzel a módszerrel

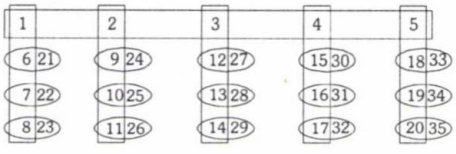
magával nem juthatunk célba, keresünk olyan módszert, amellyel kijavítható a mohó algoritmus hibája.

Ezután nézzük a konkrét javaslatot! Vajon mit jelent a „felesleges halmazok" elhagyása? Ha két halmaz felesleges, abból még nem következik, hogy mindkettő el is hagyható. A legegyszerűbb példa: az {1,2},{2,3},{1,3} halmazok. Itt mindhárom halmaz felesleges, de csak egy hagyható el közülük. A halmazokat tehát egyesével kell elhagyni, és minden lépés után meg kell nézni, hogy melyik halmazok maradtak feleslegesek. A + lépés tehát pontosabban így néz ki:

LR3 *Sorra vesszük a halmazokat, amíg nem találunk egyet, amelyet a többi lefed. Ha nem találunk ilyet, akkor vége az algoritmusnak. Ha találunk ilyet, akkor azt (tehát az első ilyet) elhagyjuk, majd kezdjük elölről LR3-tól.*

LEFEDŐ RENDSZERT KERESŐ BŐVÍTETT ALGORITMUSUNK tehát az LR1, LR2 és LR3 lépésekből áll. A kérdés az, vajon ez már mindig a minimális lefedő rendszert találja-e meg. Érdemes erre is a diákoktól kérni választ. Ha rájönnek, hogy érdemes rá ellenpéldát keresni, nem olyan nehéz találni.

4. PÉLDA. Az alaphalmaz 35 elemű. A részhalmazok: {1,2,3,4,5}, {1,6,7,8}, {2,9,10,11}, {3,12,13,14}, {4,15,16,17}, {5,18,19,20}, továbbá {i, i + 15} minden i = 6, ..., 20-ra.



E részhalmazok közül a mohó algoritmus (LR1 és LR2 lépés) *mindegyiket* kiválasztja. De mi itt a felesleges? Az első halmaz felesleges, hiszen a többi lefedi. Ám ha elhagyjuk, már egyetlen további halmazt sem hagyhatunk el. Ha viszont nem hagyjuk el, akkor az utána következő öt halmazt elhagyhatjuk, hiszen azok első elemét az első halmaz, a többi elemét a kételemű halmazok lefedik. Itt tehát a részhalmazok felsorolásának a sorrendjétől függ, hogy a bővített algoritmus a minimális lefedő rendszert találja-e meg, vagy egy nagyobbat talál. Ha az ötelemű halmaz a négyeleműek után van felsorolva, akkor megtalálja a minimálisat, különben nem.

Utóbbi esetben is egy *nem szűkíthető, mégsem minimális* lefedő rendszert találtunk. Tehát az „akadékoskodó" diákunk által javasolt bővített algoritmus sem mindig a *minimális* lefedő rendszert választja ki. Mégis jó volt valamire akadékoskodása: kiderült, hogy szükség van egy fogalmi szétválasztásra: ha egy halmazrendszer valamilyen tulajdonságra nézve *nem szűkíthető* tovább, attól még nem feltétlenül *minimális*. Kibővített algoritmusunkról csak annyit mondhatunk, hogy minden esetben nem szűkíthető lefedő rendszert talál, de nem mindig a minimálisat.

Megpróbálhatnánk úgy finomítani a bővített algoritmust, hogy az elhagyásnál nem az első sorra jövőt hagyjuk el, hanem a *legkisebbet* a feleslegesek közül, ahogyan az előbbi példánál is érdemes volt nem az öteleműt, hanem a négyeleműeket elhagyni. De példánk alábbi módosításánál már ez sem használ.

4'. PÉLDA. Az alaphalmaz most negyvenelemű. A részhalmazok: {1,2,3,4} {1,5,6,7} {2,8,9,10} {3,11,12,13} {4,14,15,16} és {i, i + 12, i + 24} minden i = 5, 6, ..., 16-ra.

Itt már minden *a sorrendtől függ*. Ha a halmazok a fenti sorrendben vannak felsorolva, akkor a mohó algoritmus először az elsőt választja ki, s ezután minden halmaznak 3-3 kipipálatlan eleme marad. Mivel a négyelemű halmazok állnak elől, először azokat választja ki, s ezután még mindig szüksége van a háromeleműekre is. Vagyis minden halmazt kiválaszt. Most jön az LR3 lépés: a feleslegesek elhagyása. Minden négyelemű halmaz felesleges. Az adott sorrend mellett az első halmazt fogja elhagyni, s ezután már nem marad felesleges halmaz. Ez nem szűkíthető, de nem minimális lefedő rendszer. Ha viszont az {1,2,3,4} halmaz

van utoljára felsorolva, akkor a mohó algoritmus először a többi négyeleműt választja ki, s ezután már az {1,2,3,4} halmazt nem is választja ki, csak a háromeleműeket. Most *a bővítésre nincs is szükség, maga a mohó algoritmus ad nem szűkíthető, de nem minimális rendszert!* Ha viszont először a háromelemű halmazok vannak felsorolva, utána a négyelemű halmazok úgy, hogy az {1,2,3,4} halmaz áll közülük legelöl, akkor a mohó algoritmus a minimális lefedő rendszert találja meg.

5. PÉLDA. Egy egyszerű példa ugyanerre:

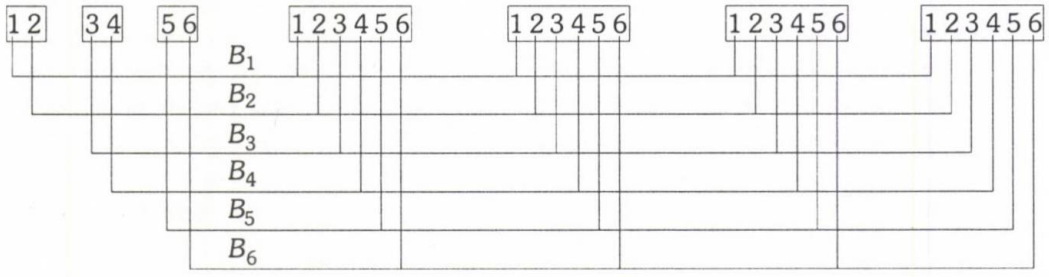
{1,2,3}, {2,3,4}, {1,4,5}, {1,5,6}.

Ha a négy halmaz ilyen sorrendben jön, akkor a mohó algoritmus először az {1,2,3}, majd az {1,4,5} halmazt, végül az {1,5,6} halmazt választja ki, s itt mindhárom halmazra szüksége is van. Ha viszont a {2,3,4} vagy az {1,5,6} halmaz jön először, akkor megtalálja a minimumot, a két diszjunkt háromelemű halmazt. Ha az {1,4,5} halmaz jön először, akkor a sorrendtől függően másodiknak az {1,2,3}, vagy a {2,3,4} halmazt választja, és harmadiknak az {1,5,6} halmazt. Feleslegesen kiválasztott halmaz csak ebben a legutolsó esetben van, és van olyan eset, amikor a mohó algoritmus nem szűkíthető, de nem minimális lefedő rendszert talál.

Az „akadékoskodó", azaz gondolkodó diákoknak remélhetőleg még itt is lesz egy kérdése: vajon nem lehetséges-e a halmazokat minden esetben úgy rendezni, hogy a mohó algoritmus bővített változata a minimális megoldást adja? Vagyis nem lehet-e a mohó algoritmust azzal megmenteni, hogy nemcsak a végére illesztünk egy „elhagyási" lépést, hanem az LR1 lépést is finomítjuk: elejére is beillesztünk egy rendezési lépést. Az algoritmus tehát így nézne ki:
LR0 lépés: „ügyesen" sorba rendezzük a megengedett halmazokat,
LR1' lépés: a kipipálatlan elemek halmaza kezdetben az összes elem,
majd ezután alkalmazzuk az LR2 és LR3 lépéseket.

Megint hangsúlyozni kell, hogy most már nem arról van szó, hogy a mohó algoritmus jó, hanem arról, hogy hogyan lehet javítani. És persze még azt sem tudjuk, hogy mit jelent ez az „ügyesen" sorba rendezés. De vajon igaz-e az, amit ez a kérdés jelent, hogy *minden* részhalmaz-rendszer sorba rendezhető úgy, hogy a (bővített) mohó algoritmussal kiválasztható legyen belőle a minimális lefedő rendszer? Ez bizony már fogas kérdés. És ha a válasz igen, még mindig hátra van az a kérdés, hogy *hogyan* kell ezt a sorbarendezést megkeresni. Valójában a válasz *nem*, de itt már nem olyan könnyű példát találni. A találékonyabb diákok azért ezzel is boldogulhatnak, ha noszogatjuk őket. Arról van szó, hogy olyan példát kell keresni, amelynél a mohó algoritmusnak csak olyan halmazoknál van választási lehetősége, amelyek szerepe szimmetrikus. Csak egy kicsit kell módosítani a 3. példán:

6. PÉLDA. Vegyünk öt $(2k - 1)$ db páronként diszjunkt hatelemű $(2k$ elemű) halmazt: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 $(\ldots A_{2k-1})$. Mindegyik halmazból kiválasztjuk az első elemet, ezek halmaza B_1, és általában: $i = 1, 2, \ldots, 5$ $(2k - 1)$-re mind-



egyikből kiválasztjuk az *i*-edik elemet, ezek halmaza B_i. Végül A_1-et felosztjuk három (k) db kételemű halmazra, ezek C_1, C_2, C_3 (... C_k). A megadott részhalmazrendszer álljon az összes B_i, C_i halmazból, továbbá az A_2, A_3, A_4, A_5 (... A_{2k-1}) halmazokból.

A B_i halmazok nyilván minimális lefedő rendszert alkotnak. A mohó algoritmus pedig az előzetes sorba rendezéstől függetlenül kiválasztja először a négy ($2k - 2$) db hatelemű ($2k$ elemű) halmazt, hiszen ezek a legnagyobbak. Utána a kételeműeket választja ki, hiszen ezeknek két-két kipipálatlan elemük van, míg a B_i halmazoknak csak egy-egy. Vagyis: *a mohó algoritmus azt a hét* ($3k - 2$) *halmazt választja ki, amelyre nincs szükség a minimális lefedő rendszerben, a minimális lefedő rendszer egyetlen elemét sem választja ki.* A minimális lefedő rendszerben $2k$ halmaz van, tehát a veszteség kb. 50%-os ennél a példánál.

Felesleges halmazok nincsenek, tehát az LR3 lépésre nincs szükség. Másrészt hiába rendezzük bárhogyan az LR0 lépésben a halmazokat, a mohó algoritmus semmilyen sorrend mellett nem adja a minimális megoldást.

A lefedő rendszert kereső mohó algoritmus tehát a módosításokkal sem mindig ad minimális megoldást. Maga a mohó algoritmus akár 100%-kal rosszabbat is adhat. Kérdés, hogy akkor mennyire rossz ez az algoritmus. Lehet-e akármekkorára növelni a százalékos veszteséget? És egyáltalán: jó-e ez az algoritmus valamire?

Nézzük először azt az esetet, amikor minden részhalmaz elemszáma kettő! Ez az eset már messze esik eredeti tanfolyamos feladatunktól: ott azt jelentené, hogy minden tanfolyamra ketten jelentkeznek. De más vonatkozásban érdekes. Ha ugyanis minden halmaz elemszáma kettő, akkor egy gráfról van szó, amelynek pontjai az alaphalmaz elemei, élei pedig a megadott részhalmazok. A feladat tehát ez: *keressünk a gráf összes pontját lefedő minimális élrendszert.* Természetesen a feladat megoldhatatlan, ha a gráfnak van izolált pontja. *Feltesszük tehát, hogy a gráfban nincs izolált pont.*

Mit csinál most a mohó algoritmus? Az LR1 lépésben sorszámozza valahogy az éleket, és a kipipálatlan pontok halmazát az összes pont halmazának állítja be. Az LR2 lépésben most csak két lehetőség van: amíg talál olyan élt, amelynek nincs közös pontja egyetlen már kiválasztott éllel sem, addig ilyet választ ki, utána a maradó pontokat egyesével fedi le (nincs izolált pont, tehát minden pontot le tud fedni). A gráf éleinek egy olyan rendszerét, amelyben semelyik két élnek nincs közös pontja, *független élrendszernek* nevezzük. A mohó algoritmus először kiválaszt egy tovább nem bővíthető független élrendszert a gráfból, majd minden még le nem fedett ponthoz egy belőle induló élt.

Most megmutatjuk a következőt: *Ha G izolált pont nélküli gráf, és pontjai lefedhetők ϱ éllel, akkor a mohó algoritmus által talált lefedő élrendszer legfeljebb 1.5ϱ élből áll.* Vagyis: ha G minimális lefedő élrendszere ϱ élből áll, akkor a mohó algoritmus ennek legfeljebb másfélszeresével lefedi a gráfot. (Az ilyen algoritmusokat, amelyek az optimum konstansszorosával oldják meg a feladatot, *szuboptimális* algoritmusoknak szokták nevezni.)

Legyen G izolált pont nélküli gráf, és legyen ϱ a gráf lefedő élek minimális száma, a gráf pontjainak száma n. Egy él legfeljebb két pontot fed le, tehát $2\varrho \geq n$. A mohó algoritmus viszont először kiválaszt valahány, mondjuk k db független élt, majd a maradó pontokat egyesével fedi le. Jelöljük az ilyen pontok számát l-lel! Azok között a pontok között, amelyeket a mohó algoritmus egyesével fed le, a *gráfban nem fut él.* Ha ugyanis futna, akkor a mohó algoritmus egy ilyen élt választana ki, és nem egyesével fedné le a két végpontját. Ebből következik, hogy a minimális lefedő élrendszer is egyesével fedi le ezeket a pontokat, tehát $l \leq \varrho$. Másrészt a k db független él két-két pontot fed le, a többi l

él egyet-egyet, tehát $2k + l = n \leqq 2\varrho$. E két egyenlőtlenség felét összeadva azt kapjuk, hogy $k + l \leqq 1{,}5\varrho$. A bal oldal éppen a mohó algoritmus által talált lefedő élrendszer éleinek száma, ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

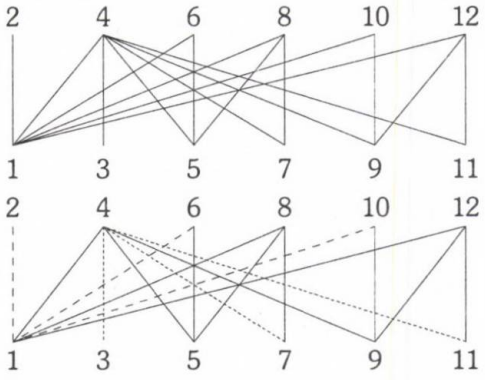
A mohó algoritmus a gráfok esetében tehát szuboptimális. De vajon nem optimális-e? Hiszen most az eredeti feladatnak olyan speciális esetéről van szó, amelyre fenti ellenpéldáink nem érvényesek. Elképzelhető, hogy most a mohó algoritmus mindig a minimális lefedő élrendszert adja. Erre azonban nem nehéz ellenpéldát adni.

G_1 GRÁF: Legyenek a gráf élei az 1-2, 3-4, 4-5, ..., $4n - 1$-$4n$, továbbá az 1-4, 5-8, ..., $4n - 3$-$4n$ élek.

Az elsőnek felsorolt $2n$ él lefedi az összes pontot, és nyilván minimális lefedő élrendszer, hiszen $4n$ pont van. De ha nem látjuk az egész gráfot, és a pontjai úgy vannak felsorolva, hogy az 1, 4, 5, 8... $4n - 3$, $4n$ pontok vannak elől, akkor először a kivastagított éleket fogja az algoritmus megtalálni, s ekkor az összes többi élre is szükség van! Vagyis a minimálisan szükséges $2n$ helyett annak másféleszeresét, $3n$-et választ ki az algoritmus. Az állításban szereplő 1,5-ös szorzó tehát nem javítható.

Itt is az a baj, hogy kiválasztottunk felesleges éleket, tehát most is felmerülhet a kérdés, hogy az LR3 lépéssel bővítve algoritmusunkat nem jutunk-e mindig el a minimális lefedő élrendszerhez. Erre is nyugodtan várhatunk ellenpéldát a diákoktól. Ilyen például a következő 12 pontú gráf:

G_2 GRÁF: 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10, 11-12, 1-4, 5-8, 9-12, 2-9, 4-9, 6-9, 8-9, 1-12, 3-12, 5-12, 7-12.



Itt is van egy hat élű lefedő rendszer, mint G_1-ben. De ha a pontok 1, 4, 5, 8, 9, 12, 2, 6, 10, 3, 7, 11 sorrendben „jönnek", akkor LR2 lépésben először az 1 pontot fedi le a mohó algoritmus az 1-4 éllel, aztán az 5 pontot az 5-8 éllel, majd a 9 pontot a 9-12 éllel. Ezután a 2 pontot az 1-2 éllel, a 6 pontot az 1-6 éllel és a 10 pontot az 1-10 éllel, végül 3, 7, 11 pontokat rendre a 4-3, 4-7, 4-11 élekkel. A kapott kilenc élből az LR3 lépés csak az először választott 1-4 élet hagyhatja el, a többi él nem felesleges. A minimálisan szükséges hat él helyett az LR3 lépéssel bővített algoritmus nyolc éllel oldja meg a feladatot. Ha ezt a gráfot $4n$ pontú gráfokra általánosítjuk, tehát veszünk n db három élből álló utat, és az első út két középső pontját minden más párosságú ponttal összekötünk, akkor $2n$ élű a minimális lefedő rendszer. Ha a pontok felsorolása az első út két középső pontjával kezdődik, majd rendre a többi út középső két pontja következik, akkor a bővített algoritmus $3n-1$ éllel oldja meg a feladatot. A bővített algoritmus esetében sem javító tehát az 1,5-ös szorzó.

Ismét felmerül a kérdés, hogy vajon a pontok és élek sorrendjének ügyes választása esetén nem lesz-e minimális a mohó vagy a bővített algoritmussal kapott lefedő rendszer? Az általános esetben az LR0 és LR1' lépés sem segített rajtunk. Most viszont segít: a gráf éleit lefedő minimális élrendszert a mohó algoritmus megtalálja –

ha a pontok és az élek éppen jó sorrendben jönnek. Nézzük, mi szükséges ennek bizonyításához. Láttuk, hogy a mohó algoritmus először kiválaszt egy nem bővíthető független élrendszert. Ha ez k elemű, akkor $2k$ pontot fed le. A maradó $n - 2k$ pontot egyesével fedi le, tehát összesen

$$k + n - 2k = n - k$$

éllel fedi le a gráf pontjait. Ez annál kevesebb él, minél nagyobb független élrendszert talál az algoritmus. Nyilván az a legjobb eset (ez most *nem* mohó gondolat), ha megtalálja a maximális független élrendszer(ek egyiké)t. A pontok és élek megfelelő sorrendje esetén ezt meg is fogja találni: egyszerűen ezeket az éleket, illetve a végpontjaikat kell először felsorolni a megfelelő sorrendben. A kérdés tehát az, hogy ha a mohó algoritmus megtalál egy ilyen maximális független élrendszert, akkor azt minimális lefedő rendszerré bővíti-e, amikor egyesével lefedi a többi pontot. Ha a független élek maximális száma ν, akkor az algoritmus $n - \nu$ élű lefedő rendszert talál. Vagyis a kérdés a következő: igaz-e, hogy ha a független élek maximális száma ν, akkor a lefedő élek minimális száma $n - \nu$? Azt tudjuk, hogy *legfeljebb* ennyi, hiszen ennyivel a mohó algoritmusnak sikerül lefednie a gráfot. Be kellene látni, hogy *legalább* ennyi – ez szükséges annak belátáshoz, hogy a mohó algoritmus szerencsés esetben *adhatja* a minimumot.

Legyen M egy minimális lefedő élrendszer. Vegyünk ki M-ből maximális sok független élt, legyen ezek száma f. Ezek $2f$ pontot fednek le, és a maradó $n - 2f$ pont között már nem fut M-beli él (különben volna M-ben $f + 1$ független él). Ezt az $n - 2f$ pontot M egyesével fedi le. További él viszont nem szerepel M-ben, mert M minimális lefedő rendszer. M-nek tehát $m = f + n - 2f = n - f$ éle van. Mivel M-ben f db független él van, a független élek maximális száma pedig ν, ezért $f \leqq \nu$. A minimális lefedő rendszernek tehát $n-f \geqq n - \nu$ éle van. Éppen ez hiányzott annak bizonyításához, hogy minden gráfban van olyan sorrendje az éleknek, amelynél a mohó algoritmus a minimális lefedő rendszert adja. Természetesen ennek a sorrendnek a megtalálása ugyanolyan nehéz feladat, mint az eredeti! Vagyis csak annyit bizonyítottunk, hogy *lehet, hogy szerencsénk van.*

A bizonyított állítás tehát algoritmikusan nem használható, viszont egy nevezetes gráfelméleti tétel következik belőle. Beláttuk, hogy a minimális lefedő élrendszernek egyrészt legfeljebb, másrészt legalább $n - \nu$ éle van. Azaz pontosan $n - \nu$ éle van. Ha tehát (egy izolált pontok nélküli gráfban) ϱ-val jelöljük a lefedő élek minimális számát, ν-vel a független élek maximális számát, akkor $\varrho = n - \nu$, azaz $\nu + \varrho = n$. Ez a tétel Gallai Tibortól származik.

Mint láttuk, a minimális lefedő élrendszer kiválasztásánál a mohó algoritmus hatékonysága azon múlik, hogy milyen jól oldja meg a következő feladatot:

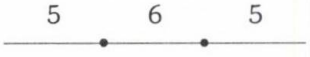
Adott egy gráf, válasszunk ki minél nagyobb független élrendszerét.

A mohó algoritmus itt egyszerűen azt jelenti, hogy amíg a még éllel le nem fedett pontok között fut él, addig ezek közül kiválasztjuk az első kézenfekvőt. Itt tehát már mindig a „vegyük a legkényelmesebbet" a mohó algoritmust irányító gondolat. Egyszerű feladat lehet annak belátása, hogy ha a független élek maximális száma ν, akkor a mohó algoritmus legalább $\nu/2$ élű független élrendszert kiválaszt. (Annyit kell meggondolni, hogy egy tetszőleges él, amelyet a független élrendszerbe választunk, a maximális független élrendszernek csak két élét teszi „használhatatlanná". Jobb nem mondható: mind a G_1, mind a G_2 gráfban van az egész gráfot lefedő maximális független élrendszer, de szerencsétlen esetben előfordulhat, hogy csak fele ekkorát talál a mohó algoritmus.) Ebből, és a fenti Gallai tételből egy másik bizonyítás is nyerhető arra, hogy a lefedő élrendszert kereső mohó algoritmus a minimumnak legfeljebb a másfélszeresével megoldja a problémát.

Mind a minimális lefedő élrendszer, mind a maximális független élrendszer keresése esetében célszerű először a mohó algoritmussal gyorsan keresni egy aránylag jó megoldást, és azután finomítani az eljárást. A maximális független élrendszer kiválasztására, s így a minimális lefedő élrendszer kiválasztására páros gráf esetén nevezetes hatékony algoritmus a König-féle alternáló utas módszer, de nem páros gráfra is létezik hatékony optimális algoritmus. Ezekről olvashatunk Gács és Lovász *Algoritmusok* c. könyvében (33-39.o.), ott további hivatkozások is vannak.

Legyen most a gráf éleinek súlya, a cél pedig az, hogy minél nagyobb összsúlyú független élrendszert válasszunk ki. A feladat a következőképpen szemléltethető. Van n tárgy, amelyek önmagukban nem érnek semmit, de némelyek párosíthatók (egy tárgy esetleg több másikkal is párosítható), s ezeknek a pároknak már meghatározott értékük van. Felfoghatjuk úgy is, hogy bármely két tárgy párosítható, és a valójában nem párosítható párok értéke nulla. A feladat: úgy párosítani a tárgyakat, hogy összértékük a lehető legnagyobb legyen. Minden tárgy legfeljebb egy párban szerepelhet. (A tárgyak a gráf pontjai, ha két tárgy párosítható, akkor behúzzuk a nekik megfelelő pontok közötti élt, és az élre „ráírjuk" ennek a párnak az értékét.)

A mohó algoritmus most nyilván az, hogy veszünk egy maximális értékű párt, a maradó tárgyak közül megint kiválasztunk egy maximális értékű párt, s ezt addig folytatjuk, amíg van a maradók között kiválasztható pár. Gráfokra ez azt jelenti, hogy veszünk egy maximális súlyú élt, elhagyjuk a végpontjaiból induló éleket, és a maradó élek közül veszünk egy maximális súlyút, majd ezt ismételjük, amíg lehet. Megint kísért az a gondolat, hogy ez az eljárás nyilván a maximumot adja, hiszen minden lépésben a legjobbat csináltuk. Persze nem így van, hiszen ha például minden él súlya egy, akkor visszajutunk az előző, súlyozatlan élekre vonatkozó feladathoz, ahol nem mindig a maximumot adja. Ha azonban az élek szerencsésen vannak sorba rendezve, akkor igen. Kérdés, hogy igaz-e a súlyozott esetben is? A válasz nem, és az ellenpélda igen egyszerű: megfelel bármely olyan három élből álló út, amelynek középső éle súlyosabb a két szélső élnél, de súlya kisebb a két szélső él súlyának összegénél. Például:



Itt a mohó algoritmus először a 6 súlyú élt választja ki, pedig a két 5 súlyú él független, és összsúlyúk nagyobb. 6 helyett $5+\varepsilon$-t írva is működik az ellenpélda, és nyilván akárhány példányban egymás mellé lehet tenni, tehát a veszteség a mohó algoritmussal lényegében 50%. A súlyozatlan esetben láttuk, hogy ennél nagyobb veszteség nem lesz, a maximális független élszámnak legalább a felét mindig kiválasztja az algoritmus. Ez a súlyozott esetben is igaz. Ennek bizonyításához jelöljük A-val azt a független élrendszert, amelyet a mohó algoritmus választ ki és M-mel a(z egyik) maximális összsúlyú független élrendszert. Azt mondjuk, hogy A egy éle *elrontja* M egy élét, ha van vele közös pontja. Legyen a mohó algoritmus által először kiválasztott él e_1, és legyen e_1 súlya s_1. e_1 M-nek legfeljebb két élét rontja el, és e két él súlya legfeljebb s_1, hiszen e_1 a(z egyik) legsúlyosabb él a gráfban. Hagyjuk el most a gráfból az e_1 élt és az általa elrontott legfeljebb két élt. Már elrontott élt nyilván nem választ az algoritmus, tehát most a maradó, e_1-től független élek közül választ egy maximális súlyút. Legyen ez e_2, és legyen e_2 súlya $s_2 \cdot e_2$ M-nek megint legfeljebb két élét rontja el. Az(ok) az él(ek), amely(ek) eddig még nem volt(ak) elrontva, legfeljebb s_2 súlyúak, különben ezek valamelyikét választotta volna az algoritmus. Ezt a gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy minden kiválasztott él M-ből legfeljebb kétszer akkor súlyt ront el. Amíg M-nek van el nem rontott éle, addig az algorit-

mus biztosan nem ér véget, hiszen addig van a kiválasztott élektől független él. Ebből következik, hogy a maximális súlyú független élrendszer keresésére is szuboptimális a mohó algoritmus: olyan független élrendszert választ ki, amelynek összsúlya legalább a fele a maximális összsúlyú független élrendszer összsúlyának.

Beláttuk, hogy gráfok minimális lefedő élrendszerének keresésére a mohó algoritmus ha nem is optimális, de szuboptimális: a minimum konstansszorosával megoldja a feladatot. Most térjünk vissza az általános feladathoz, ahol adott halmaz adott részhalmazai közül kell minimális lefedő rendszert keresni. Ha itt a legnagyobb részhalmaz elemszáma (a legtöbb jelentkezőt érdeklő tanfolyamra jelentkezők száma) legfeljebb k, akkor is igaz egy hasonló állítás, nevezetesen az, hogy ez esetben is szuboptimális a mohó algoritmus. Ha egy ilyen részhalmazrendszer lefedhető M részhalmazával, akkor a mohó algoritmus legfeljebb a

$$(1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/k)M$$

részhalmazzal megoldja a feladatot.

Ennek bizonyításához legyen F egy minimális lefedő rendszer. Nézzük, mit csinál a mohó algoritmus az általános esetben. Egy ideig csupa olyan halmazt választ ki, amelyek mindegyike k db még kipipálatlan elemet fed le. Legyen ezek száma a_k. Ezután már csak olyan halmazok maradnak, amelyek legfeljebb $k-1$ kipipálatlan elemet fednek le. Legyen a_{k-1} az olyan kiválasztott halmazok száma, amelyek pontosan $k-1$ még kipipálatlan elemet fednek le. Általában legyen a_i az olyan kiválasztott halmazok száma, amelyek pontosan i db még kipipálatlan elemet fednek le. Ekkor a lefedő rendszer pontosan

$$ka_k + (k-1)a_{k-1} + ... + a_i i + ... + a_1$$

elemet fed le, tehát

$$ka_k + (k-1)a_{k-1} + ... + ia_i + ... + a_1 = n \leqq k|F|.$$

Itt kihasználtuk, hogy F minden eleme legfeljebb k elemű, tehát együtt legfeljebb $k|F|$ elemet fednek le. Az első a_k halmaz kiválasztása és elemeinek kipipálása után a mohó algoritmus már csak olyan halmazokat talál, amelyekben legfeljebb $k-1$ db kipipálatlan elem van. Tehát a megadott részhalmazok mindegyikében legfeljebb ennyi kipipálatlan elem van, így F halmazaiban is. Mivel F minden kipipálatlan elemet is lefed, ezért most összesen legfeljebb $(k-1)|F|$ kipipálatlan elem van. Másrészt a mohó algoritmus ezután pontosan

$$(k-1)a_{k-1} + ... + ia_i + ... + a_1$$

elemet fed le, tehát ennyi a kipipálatlan elemek száma. Azt kaptuk, hogy

$$(k-1)a_{k-1} + ... + ia_i + ... + a_1 \leqq (k-1)|F|.$$

Ugyanígy kapjuk minden i-re, hogy

$$ia_i + (i-1)ai - 1 + ... + a1 \leqq i|F|.$$

Vagyis azt kapjuk, hogy

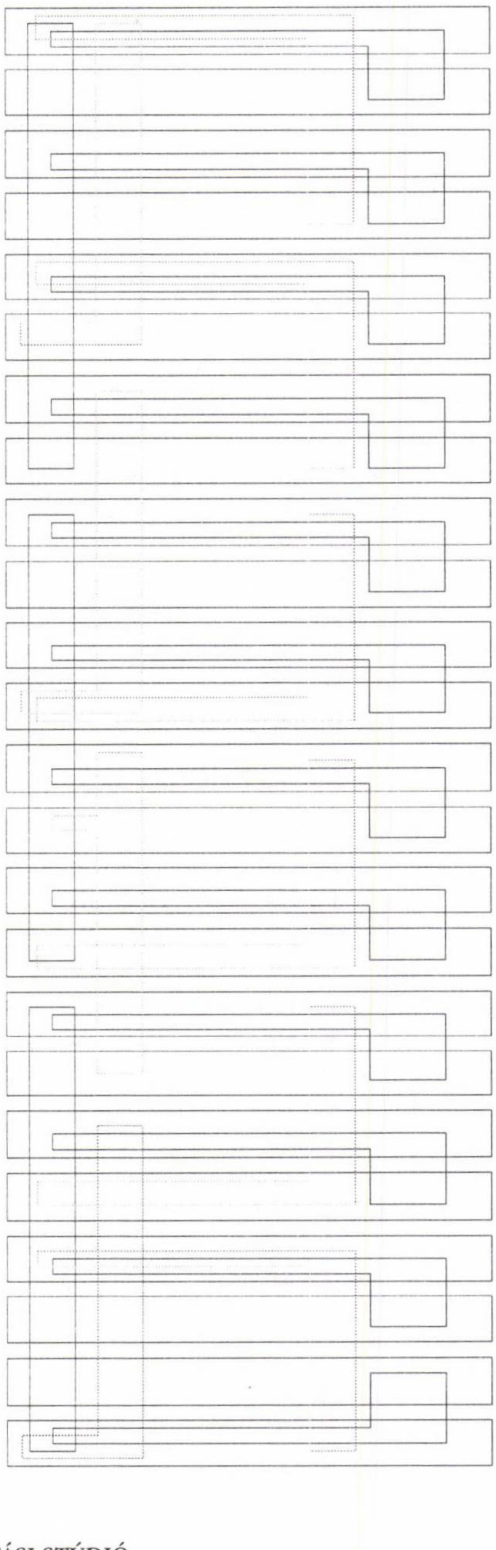
$$\begin{gathered} ka_k + (k-1)a_{k-1} + ... + ia_i + ... + a_1 \leqq k|F| \\ ... \\ ia_i + (i-1)a_{i-1} + ... + a_1 \leqq i|F| \\ ... \\ 2a_2 + a_1 \leqq 2|F|, \\ a_1 \leqq |F|. \end{gathered}$$

Azt állítjuk, hogy ebből a k db egyenlőtlenségből következik, hogy az a_i-k összege legfeljebb $(1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/k)|F|$. Ez önmagában is szép feladat. Érdemes $k = 2,3,4$-re külön feladni. $k = 4$-re például így hangzik: a,b,c,d pozitív számokról tudjuk, hogy $4a + 3b + 2c + d \leqq 4$, $3b + 2c + d \leqq 3$, $2c + d \leqq 2$ és $d \leqq 1$. Bizonyítandó, hogy a négy szám összege legfeljebb $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$. Az általános megoldás az, hogy a k_{ak}-val kezdődő egyenlőtlenséget osztjuk k-val, majd

$i = 1,2, \ldots k-1$-re az ia_i-vel kezdődőt osztjuk $1/i(i-1)$-gyel és a kapott egyenlőtlenségeket összeadjuk. Ekkor a jobb oldalon éppen $(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/k)|F|$ áll. Az $1/k + 1/k(k-1) + 1/(k-1)(k-2) + \ldots + 1/(i+1)i = 1/i$ egyenlőtlenség felhasználásával pedig kijön, hogy a bal oldalon éppen az a_i számok összege áll. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A bizonyításból látszik, hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha minden egyenlőtlenségben egyenlőség áll. Ebből pedig kiolvasható egy példa arra is, hogy az állítás pontos. Mi most az így kapható példának egy olyan változatát ismertetjük, amelyben a mohó algoritmus a halmazok sorrendjétől függetlenül kiválaszt egy olyan nem szűkíthető lefedő rendszert, amelynek nagysága a minimálissal osztva végtelenhez tart. (Itt tehát LR0, LR1', LR3 sem segít.) A példát először egy 96 elemű halmazon mutatjuk meg. Ennek elemeit az áttekinthetősége érdekében négy db 24 elemű csoportba osztjuk, ezek az A, B, C, D halmazok. A T_i halmazok a következők lesznek: I. Az A halmazt három db nyolcelemű részhalmazra osztjuk, ezek lesznek T_1, T_2, T_3. II. A B halmazt négy db hatelemű halmazra osztjuk és mindegyikhez hozzávesszük A egy-egy tetszőleges elemét, ez a négy hételemű halmaz lesz T_4, T_5, T_6 és T_7. III. A C halmazt hat db négyelemű részhalmazra osztjuk, mindegyikhez hozzávesszük A és B egy-egy elemét. Az így kapott hat db hatelemű halmaz lesz T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}. IV. A D halmazt 12 db 2-2 elemű részhalmazra osztjuk, mindegyikhez hozzávesszük A, B és C egy-egy elemét, az így kapott 12 db ötelemű halmaz lesz $T_{14} - T_{25}$; V. Végül a T_{25+i} négyelemű halmazokat úgy kapjuk, hogy megszámozzuk A, B, C, és D elemeit, és minden halmazból kivesszük az i-edik elemet.

Mohó algoritmusunk először kiválasztja T_1-et, T_2-t és T_3-at, mert ezek a legnagyobbak. Ezután kiválasztja a T_4–T_7 halmazokat is, mert most ezek fedik le a legtöbb még lefedetlen elemet (szám szerint hatot). Ezután a $T_8 - T_{13}$ hal-



mazokat is kiválasztja, mert ezeknek 4-4 kipipálatlan elemük van. Végül a $T_{14} - T_{25}$ halmazokat is, mert ezeknek még 2-2 lefedetlen elemük van, míg a $T_{26} - T_{49}$ halmazoknak csak 1-1 Az így kapott 25 halmaz nem szűkíthető lefedő rendszer, és nem tartalmazza a minimális, 24 halmazból álló lefedő rendszer egyetlen elemét sem. Ez még csak 4%-os veszteség, de ha a kiinduló halmazt növeljük, akkor itt már a veszteség/minimum aránya végtelenhez tart. Ha k db $k!$ elemű halmazból indulunk ki, és az i-ediket diszjunkt $2(k–i)$ elemű részhalmazokra osztjuk, és ezek mindegyikéhez hozzáveszünk egy-egy elemet az első, második, ..., i – 1-edik halmazból, majd az így kapott részhalmazrendszerhez még hozzáveszünk $k!$ db olyan halmazt, amely a k db kiindulási halmazból egy-egy elemet tartalmaz, akkor ugyanígy végiggondolva látható, hogy az utóbbi $k!$ db halmaz minimális lefedő rendszer, míg az algoritmus éppen ezeket a halmazokat nem választja ki, ezeken kívül viszont minden halmazt kiválaszt, azaz $k!(1/2 + 1/4 + ... + 1/2k)$ halmazt választ ki, s ez $k!$-sal, a minimummal osztva végtelenhez tart.

Ha a megadott részhalmazok elemszáma felülről korlátos, akkor a veszteség/minimum aránya lényegében ln$k$-nál nem nagyobb. Ez mutatja, hogy hiányosságaik ellenére sem árt tehát ismerni és értékelni a mohó algoritmusokat: nagyon hasznosak, ha tudjuk, hogy mire képesek, mire nem. A mohó algoritmus a lefedő halmazrendszer megkeresésénél nem adja ugyan az optimumot, de ahhoz képest, hogy a minimum megkereséséhez az *összes lehetséges lefedő rendszert végig kellene próbálni, megéri engedni a maximalista célból és cserébe gyorsítani az eljárást.* De tudni kell, hogy most nem feltétlenül a „legjobbat" állítottuk elő.

Ekkor viszont felmerül a kérdés: *hogyan szervezzük meg* ezt az algoritmust? Az első elképzelésünk valami ilyesmi lehet: Megszámozzuk az alaphalmaz elemeit (a tanulókat), és az adott részhalmazokat (a lehetséges tanfolyamokat) egy-egy számhalmazzal (a rá jelentkező tanulók sorszámával) jellemezzük. Szükség van annak számontartására, hogy melyik elemeket (tanulókat) nem pipáltunk még ki, azaz melyek nincsenek még lefedve. Ez lesz a kipipálatlan elemek halmaza, amely kezdetben az egész halmaz (az összes tanuló sorszáma). Ha kiválasztunk egy új részhalmazt (tanfolyamot), annak elemeit kihúzzuk a kipipálatlan elemek halmazából, majd ennek alapján módosítjuk az összes adott részhalmazt: vesszük mindegyik metszetét a kipipálatlan elemek halmazával. Ezután megkeressük az egyik olyan (módosított) részhalmazt (tanfolyamot), amelynek a legtöbb eleme van.

Ez azonban igen bonyolult eljáráshoz vezet. Van ugyan egy adatstruktúra, az *illeszkedési mátrix,* amellyel a fenti elgondoláshoz nagyon hasonló jól kivitelezhető, de ez csak akkor nem foglal el túl sok helyet, ha a részhalmazok nem túl kicsik az alaphalmazhoz képest. Az algoritmus tervezésénél figyelni kell arra, hogy ne hajtsunk végre feleslegesen túl bonyolult műveleteket. A fenti eljárásban a kipipálatlan elemek és az adott részhalmazok metszetének elkészítése ilyen felesleges lépés, hiszen minket ennek a metszetnek *csak az elemszáma érdekel,* ehhez viszont a metszetképzést nem kell ténylegesen végrehajtani, ez megoldható egy-egy elemszám-mutatóval is. Ennek alapján az algoritmus a következőképpen szervezhető.

Az LR1 lépés végrehajtása:

A) Megszámozzuk a megadott részhalmazokat.

B) Felveszünk egy X halmazt, amely a még kipipálatlan elemek halmaza, ez kezdetben az egész halmaz.

C) Minden T_i részhalmazhoz rendelünk egy m_i elemszám-mutatót, amely azt mutatja, hogy a T_i részhalmaznak pillanatnyilag hány kipipálatlan eleme van.

D) Minden t_j elemhez elkészítjük azoknak a T_i részhalmazoknak a listáját, amelyek tartalmazzák t_j-t, ez valójában az illető részhalmazok sorszámának listája. (Minden tanulóhoz készí-

tünk egy listát, amelyen felsoroljuk azokat a tanfolyamokat, amelyekre jelentkezett).

Az LR2 lépés végrehajtása:

A) Ha kiválasztottunk egy T_i részhalmazt (tanfolyamot), akkor sorra vesszük T_i elemeit.

B) Ha t a T_i egy olyan eleme, amely nem szerepel X-ben (azaz már kipipáltuk korábban), akkor figyelmen kívül hagyjuk, ugrunk *C)*-hez; ha t szerepel X-ben, akkor a t listáján szereplő halmazok (tanfolyamok) elemszám-mutatóját csökkentjük eggyel, majd magát t-t kipipáljuk, azaz elhagyjuk X-ből és ugrunk C)-hez;

C) Rátérünk T_i soron következő elemére. Ha van, ez lesz az új t, és visszamegyünk B)-hez. Ha T-nek nincs több eleme (azaz T-nek már minden elemét kipipáltuk), akkor ugrunk D)-re.

D) Megnézzük, üres-e már X. Ha igen, akkor befejeztük az eljárást.

Ha nem, akkor sorra vesszük a T_i halmazok aktuális elemszám-mutatóit (a már kiválasztottak esetében ez nulla!) és kiválasztjuk az (első) legnagyobbat: az ehhez tartozó részhalmaz (tanfolyam) lesz az új kiválasztott T_i halmaz, és kezdjük *A)*-nál elölről az eljárást.

Mint látjuk, a mohó algoritmus megszervezése sem egészen sima. Nem következik lineárisan a korábban megfogalmazott algoritmusból.

Ha az adott részhalmazok nagyok, akkor az algoritmus előnyösen szervezhető az ún. *illeszkedési mátrix* segítségével. Az illeszkedési mátrix i-edik sorának j-edik eleme akkor 1, ha az i-edik elem benne van a j-edik részhalmazban (i-edik tanuló jelentkezett a j-edik tanfolyamra), különben nulla. Minden oszlop egy halmazt, minden sor egy elemet reprezentál. Hozzávesszünk egy plusz sort is: minden sorban összeadjuk az egyeseket. Most ez az elemszám-mutató. Eddig tart az LR1 lépés. Az LR2 lépés során ezt a mátrixot változtatjuk úgy, hogy mindig azt mutassa, hogy a még ki nem választott részhalmazoknak melyik kipipálatlan elemek az elemei (a még ki nem választott tanfolyamokra melyik kipipálatlan tanulók jelentkeztek). Ehhez egy részhalmaz kiválasztása után mindig fel kell frissíteni a mátrixot. Végig kell menni a hozzá tartozó oszlopon, és amelyik sorban egyes van, azt a sort teljesen ki kell nullázni, hiszen az illető elemet épp most fedjük le (az illető tanuló épp most kap tanfolyamot). Ezután minden oszlopban össze kell adni az elemeket, és *ha van nem-nulla összeg,* akkor meg kell keresni az első olyat, amelyben maximális ez az összeg. Ez lesz az új kiválasztott halmaz (tanfolyam). Ha minden összeg nulla, akkor minden elemet lefedtünk (minden tanulóhoz találtunk tanfolyamot), az eljárásnak vége.

Az illeszkedési mátrix egy nagyon sokoldalúan használható struktúra, pl. gráfelméleti feladatoknál is. Ha az utóbbi módon szervezett algoritmust nézzük, az ott szereplő illeszkedési mátrix felfogható egy páros gráf illeszkedési mátrixának is: az oszlopok jelölik az egyik osztály elemeit, a sorok a másik osztály elemeit és az egyesek jelölik az éleket. Ebben az esetben arra a gráfelméleti feladatra adtunk (szuboptimális mohó) algoritmust, hogy *egy – izolált pontot nem tartalmazó – páros gráf egyik osztályában ki kell választani minél kevesebb olyan pontot, amelyekből kiinduló élek együtt a másik osztály minden pontját elérik.*

De nemcsak páros, hanem tetszőleges gráfot is ábrázolhatunk illeszkedési mátrixszal, ekkor az oszlopok is, a sorok is a gráf pontjait jelentik, az i-edik sor j-edik eleme pontosan akkor 1, ha az i-edik és j-edik pont össze van kötve, különben 0. De a j-edik sor i-edik eleme is pontosan ekkor 1, tehát a mátrix szimmetrikus lesz a főátlóra. A fenti algoritmust ilyen szimmetrikus illeszkedési mátrixokon hajtva végre egy másik gráfelméleti feladatra kaptunk szuboptimális algoritmust: *egy gráfban keresni kell minél kevesebb olyan pontot, amelyek szomszédjai között az összes pont előfordul.*

E két feladatnál fontosabb feladathoz jutunk, ha az eredeti illeszkedési mátrixot tükrözzük, és így hajtjuk rajta végre az algoritmust. Most a T_i részhalmazok az *elemek,* és a j-edik oszlopban azoknak a részhalmazoknak a helyén

áll egyes, amelyek tartalmazzák a j-edik elemet. Vagyis a j-edik oszlop a j-edik elemet tartalmazó részhalmazok halmazát reprezentálja. Az algoritmus ezek közül választ ki egy lefedő rendszert. Ha meggondoljuk, ez olyan *elemek* kiválasztását jelenti, amelyek közül minden *eredetileg adott részhalmaz* tartalmaz legalább egyet. Azaz együtt az összes (eredetileg adott) részhalmazt *lefogják*. A fenti algoritmus tehát egyben szuboptimális mohó algoritmust ad a következő feladatra is:

Adott véges halmaz adott részhalmazrendszeréhez ki kell választani egy minimális lefogó pontrendszert. A minimális lefogó pontrendszer keresésének feladata és a minimális lefedő halmazrendszer keresésének feladata tehát visszavezethető egymásra.

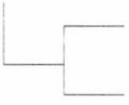
Ezt szemléltethetjük azzal is, hogy megnézzük, mi történik, ha az eredeti, lefedő halmazrendszert kereső feladatban az alaphalmaz egy véges, esetleg többszörös éleket is tartalmazó gráf élei, a megadott részhalmazok pedig a gráf egy-egy pontjából kiinduló élek halmaza. Így egy speciális típusú halmazrendszert kapunk, amelyben az alaphalmaz minden eleme (vagyis minden él) pontosan két részhalmaznak eleme. Ha most találunk egy lefedő halmazrendszert, akkor olyan pontokat találunk a gráfban, amelyekből induló élek a gráf összes éleit kiadják. Vagyis olyan pontokat, amelyek a gráf összes élét lefogják. Ebben a speciális esetben tehát a minimális lefedő rendszer keresésének feladata a következő gráfelméleti feladattá alakul át:

Adott gráfban meg kell keresni a(z egyik) minimális lefogó pontrendszert.

A többszörös éleknek a feladat szempontjából semmi jelentősége nincsen, azok tehát elhagyhatók, vagyis ha két halmaznak több közös eleme van, azokból elég egyet meghagyni.

Algoritmusunk ebben az esetben a következőt csinálja. LR1 lépésben sorszámozza a pontokat. Ezután LR2 lépésben kiválasztja a maximális fokú pontot vagy azok közül az elsőt, elhagyja a belőle induló éleket, majd az így kapott részgráfban megismétli az LR2 eljárást (ismét megkeresi az első maximális fokú pontot, és elhagyja a belőle induló éleket, stb.), amíg nem marad él.

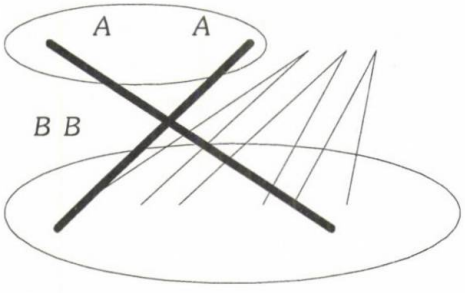
A kiindulási halmaz itt igen speciális, tehát újra kérdés, hogy a algoritmusunk e gráf-feladatnál hogyan viselkedik. Ha az általános feladatnál szuboptimális, akkor a speciálisnál is szuboptimális, tehát ha a gráfban minden pont foka $\leq k$, akkor a minimum legfeljebb (k-tól függő) konstansszorosával megoldja a feladatot. De vajon nem optimális-e ebben a speciális esetben? Sajnos, nem az. Az általános feladatnál adott példák átalakíthatók úgy, hogy itt is ellenpéldák legyenek. Az első példáknak itt megfelel egy gráf, amelynek komponensei olyan fák, amelyeknek gyökeréből legalább három pontfüggetlen, kettő hosszú út indul ki.



Az algoritmus minden komponensben kiválasztja a gyökeret, majd minden útból még egy pontot. Ha ezek a gyökér szomszédai, azok önmagukban is lefogják az összes élt, tehát a mohó algoritmus nem optimális. A veszteség 33% is lehet, ha minden gyökérből három út indul. Ebben az esetben még segít az LR3 lépéssel való bővítés: a gyökerek elhagyásával minimális lefogó pontrendszerhez jutunk. Könnyű olyan példát is adni, ahol a mohó algoritmus nem szűkíthető lefogó pontrendszert választ ki, de a sorrendtől függően ez lehet nem minimális is. A legegyszerűbb példa egy páros hosszú (azaz páros sok élből, páratlan sok pontból álló) út. Itt a páros sorszámú pontok lefogják az összes élt, és számuk az élszám fele. Ha azonban nem egy páros sorszámú pontnál, hanem pl. a középsőnél kezdjük a választást, akkor eggyel több pontot kell kiválasztanunk. Ez lehet az összes páratlan sorszámú pont, de lehet sok más is. Az biztos, hogy az így

kapott lefogó pontrendszer nem szűkíthető, és eggyel több pontja van a minimálisnál.

Hátra van még az a kérdés, hogy nincs-e minden gráfhoz olyan szerencsés sorrend, amely esetén a mohó algoritmus kiadja a minimális lefogó rendszert. A hét pontú fa mutatja, hogy nincs. De itt még használ az LR3 lépéssel való bővítés. De ez sem mindig van így. Szerencsére erre a példa leolvasható a 6. példán, mert az éppen egy olyan halmazrendszer, amelyben minden elem pontosan kétszer szerepel, tehát felfogható egy gráfban a pontok szomszédsági halmazainak rendszereként. Az alábbi ábrán látható 13 pontú gráfot kapjuk belőle.



A négy elemű, *B* hat elemű, a két vastag vonal azt jelzi, hogy *A* minden pontja össze van kötve *B* minden pontjával. *A* pontjai tehát hatodfokúak, míg *B* pontjai ötödfokúak. A mohó algoritmus ezért először *A* pontjait fogja kiválasztani és elhagyja az *A*-ból induló éleket. A maradó gráfban *B* minden pontja elsőfokú, míg a fenti három pont másodfokú, a mohó algoritmus ezeket fogja kiválasztani. Így pontosan a felső osztály pontjait fogja kiválasztani függetlenül attól, milyen sorrend alakul ki LR0 és LR1' lépésben. S mivel a kapott lefogó pontrendszer nem szűkíthető, LR3-ra nincs is szükség. A fenti példában a mohó algoritmus csak eggyel választ többet a minimumnál, de ha *B* $2k$ elemű, *A* $2k-2$ elemű, a szabadon álló három pont helyett k-t rajzolunk, akkor a minimálisan szükséges $2k$ helyett ez $3k-2$, azaz 50%-os veszteség.

Érdemes megjegyezni, hogy ha *F* egy lefogó pontrendszer a *G* gráfban, akkor *G* többi pontja között nem fut él, így ezek *független pontrendszert* alkotnak. És fordítva: ha *H* független pontrendszer a gráfban, akkor a többi pont lefogó pontrendszert alkot. Ebből következik, hogy *a független pontok maximumának és a lefogó pontok minimumának összege minden gráfban a gráf pontjainak számával egyenlő; egy minimális lefogó pontrendszer komplementer halmaza éppen egy maximális független pontrendszer és viszont.* Ez a tétel is Gallai Tibortól származik. A minimális lefogó pontrendszert kereső algoritmus tehát maximális független pontrendszert kereső algoritmus is egyben. Erre pedig nem ismert hatékony algoritmus, csak olyan, amely exponenciális lépést használ (l. Gács és Lovász idézett könyvének 29-33.oldalát).

Végül még egy kérdés merülhet fel. Az LR3 lépés egymagában is olyan algoritmus, amely nem szűkíthető lefedő rendszert ad. Ez az „óvatos" algoritmus, amely sorra veszi az adott részhalmazokat, és elhagyja azt, amelyik felesleges. Vagyis veszi a T_i halmazt és ha az el nem hagyott halmazok teljesen lefedik, akkor elhagyja, ellenkező esetben megtartja és újrakezdi T_{i+1}-gyel. Ez az algoritmus például az illeszkedési mátrixszal könnyen szervezhető. Kérdés, vajon ez az algoritmus szuboptimális-e. Nyilván nem szűkíthető lefedő rendszert választ ki. Így minden kiválasztott részhalmazhoz van egy olyan elem, amelyet csak ő fed le. Vagyis legfeljebb n halmazt választ ki, ahol n az alaphalmaz elemszáma. Másrészt tegyük fel, hogy minden adott részhalmaz elemszáma $\leqq k$. Ekkor legalább n/k halmaz kell az alaphalmaz lefedéséhez. Vagyis az óvatos algoritmus a minimálisan szükséges legfeljebb k-szorosával oldja meg a feladatot. Azaz ez is szuboptimális algoritmus, ha az adott részhalmazok elemszáma felülről korlátos.

Rendezések

Eddig nem törődtünk azzal, hogy mit jelent az „algoritmus" kifejezés. Definiálni most sem akarjuk, de a következő feladatok arra is rávezetnek, hogy pár alapvető követelményt megfogalmazzunk, ami szükséges egy feladat algoritmizálásához. Ez rá fog mutatni arra is, hogy még mire használható az algoritmus fogalma a középiskolában. A feladatokat a *permutációk* köréből válogattam. A permutációkról, azok szerkezetéről ugyanis nagyon keveset tanítunk. Egy tehetséges tanítványom, aki a számítástechnika tanulmányi versenyen első tízben végzett, negyedikes(!) korában azt kérdezte tőlem, hogyan lehet rekurzívan felsorolni 100 elem összes permutációját. Meglepődött az egyszerű válaszon: ha az i-edik lépésben már felsoroltuk az i elem összes permutációját, akkor az $i + 1$-edik lépés az, hogy mindenhova beszúrjuk az $i + 1$-edik elemet. A következő versenyen ez a trivialitás 100 pontból 40-et jelentett neki.

1. Egy 30 (n) tagú osztály össze-vissza áll sorban. Nagyság szerinti sorrendbe szeretnénk állítani őket. A megengedett művelet: két gyerek helyet cserél.

Ebben a feladatban már benne van az algoritmus „gondolatfegyelmező" jellege: világosan látni kell, milyen művelet van megengedve. Itt például nincs megengedve többes csere, csak ketten cserélhetnek helyet. Még az sem biztos, hogy ezzel a művelettel megvalósítható a célunk.

Egészen más feladathoz jutunk, ha a megengedett műveletet változtatjuk:

2. Most a következő művelet van megengedve: kijelölünk (páronként diszjunkt) párokat, és sípszóra ezek a párok helyet cserélnek.

3. Ezt a feladatot szemléletesebb egy tálon egymás fölött levő, különböző nagyságú palacsintákra elmondani. Ezeket kell nagyság szerinti sorrendbe átrendezni. A megengedett művelet az, hogy valahány felül levő palacsintát egyszerre megforgatunk (vagyis egy felső „szelet" sorrendjét megcseréljük).

4. A megengedett művelet az, hogy két *egymás mellett álló* gyerek helyet cserél.

A négy feladat négy teljesen különböző típusú probléma, pedig csak a megengedett műveletet változtattuk. E feladatok alkalmasak annak tisztázására, hogy *mit* is *csinál az algoritmus*, és mi kell ahhoz, hogy egy feladat megoldására algoritmust kereshessünk. Egy algoritmus adott *kiinduló helyzetből megengedett műveletek (és csak azok) segítségével eljut egy adott célhoz.* Az algoritmushoz tehát szükséges:

A) a lehetséges kiinduló helyzetek jellemzése,

B) az elérendő cél jellemzése,

C) a megengedett művelet(ek) jellemzése.

A fenti négy feladatban az *elérendő cél azonos:* az elemek sorba rendezése valamilyen meghatározott szempont (itt: nagyság) szerint. Látszólag a *kiinduló helyzet* is azonos, de ez már nem egészen van így. Az első három feladatban a kiinduló helyzet az, hogy adott valamely „össze-vissza" sorrendje 30 (n) elemnek, de ezeknek az elemeknek *ismerjük a jó sorrendjét is*, vagyis tudjuk, hogy melyik elem hanyadik a jó sorrendben. A 4. feladatnál ez nem így lesz.

A *megengedett művelet* az 1. feladatnál két tetszőleges elem cseréje. A 2. feladatnál egyszerre több pár is cserélhet, de mindenki csak egy párban lehet benne. A 3. feladatban egy kezdőszelet sorrendjét fordíthatjuk meg. A 4. feladatban két szomszédos elemet cserélhetünk meg.

Az algoritmussal szemben támasztott *első követelmény* az, hogy a megengedett műveletek *véges sokszori* alkalmazásával *minden lehetséges kiinduló helyzetből eljusson a célhoz.* További követelmény az algoritmus hatékonysága, gyorsasága. Erre később visszatérünk.

Az első kérdés tehát az: *van-e* egyáltalán ilyen algoritmus a fenti feladatoknál.

A 3. feladat esetében már egy általános iskolás diák könnyen választ adhat a kérdésre. Vegyük a legnagyobb palacsintát, a vele kezdődő részt fordítsuk meg, majd fordítsuk meg az egész tálat. Ezzel a legnagyobb palacsinta került legalulra. A továbbiakban feledkezzünk meg róla, és kezdjük elölről. Keressük meg a második legnagyobb palacsintát, forgassuk legfelülre, majd az egész tálat a legnagyobb nélkül forgassuk meg, így a második legnagyobb kerül a második helyre. Róla is elfeledkezhetünk, és kezdhetjük elölről. Így nyilván $2n - 3$ forgatással nagyság szerinti sorrendbe állíthatók a palacsinták. (Az utolsó két palacsintánál nyerjük a – 3-mat.)

Az egyetlen probléma ezzel a megoldással: *ellenőrizni kell, hogy a helyére tett palacsinták elhagyása után is megengedett művelet marade a megengedett művelet:* továbbra is egy kezdőszeletet forgatunk-e, amikor az „egészet" forgatjuk. De ez nyilvánvaló. Csak azért érdemes megemlíteni, mert ilyen buktatók gyakran jönnek elő algoritmusnál.

A fenti megoldás rögtön még egy tulajdonságát kiemeli az algoritmusnak: az algoritmus ciklikus, vagy rekurzív részekből áll: ugyanazt az eljárást – vagy eljárásokat – hajtja végre egyre kevesebb, vagy több elemen. (Ez teljesült a lefedő rendszert kereső algoritmusnál is.)

A palacsintás feladatról befejezésül még annyit, hogy nem ismeretes, mi a leggyorsabb módszer, de tudják, hogy nem a fenti a leggyorsabb, Győri E. és Turán Gy. megmutatta, hogy $5(n + 1)/3$ forgatás is elég. Másrészt van olyan elrendezés, amely cn forgatást kíván.

Most térjünk rá az 1. feladatra. Az 1. kérdés tehát az: egy-egy pár cseréjével megvalósítható-e a célunk, sorrendbe állíthatók-e az elemek nagyság szerint?

A válasz: igen. Már a *mohó algoritmussal* is megvalósítható. A mohó algoritmus itt értelemszerűen azt jelenti: minden lépésben vesszük az első olyan diákot, aki nem a helyén áll, és azt kicseréljük a helyén állóval. (Ha körülményes azt vizsgálni, hogy melyik diák áll a helyén, melyik nem, akkor csinálhatjuk ehelyett azt, hogy megkeressük a legnagyobbat – ez szabad szemmel is látható – és a helyére cseréljük, majd őt elhagyjuk, és kezdjük elölről.) Mindkét esetben nyilvánvaló, hogy az algoritmus legfeljebb 29 $(n - 1)$ csere után véget ér úgy, hogy minden diák (elem) a helyén lesz, hiszen minden lépésben legalább eggyel nő a helyén levő diákok (elemek) száma.

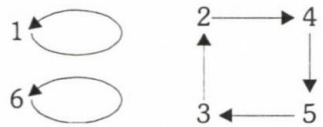
Itt tehát a mohó algoritmus jó arra, hogy megmutassuk: a cél az adott eszközzel (művelettel) megvalósítható. A bizonyítás pedig egy egyszerű, könnyen érthető állapotfüggvényes bizonyítás. Az algoritmus minden állapotához hozzárendeltünk egy *állapotfüggvény-értéket:* azoknak a diákoknak a számát, akik a helyükön állnak. Ez az érték minden csere után legalább eggyel csökken. Az algoritmus rögtön becslést is ad a *szükséges lépésszámra,* és ezt is az állapotfüggvénnyel kaptuk. Ilyen állapotfüggvényes bizonyításra lesz még példa. Az állapotfüggvény különböző felhasználási lehetőségeinek bemutatása külön cikket igényelne.

Hogy párok cseréjével az elemek egy „összevissza" sorrendből a jó sorrendbe rendezhetők, arra szükség van akkor is, ha az ismert „átrendezéses" egyenlőtlenséget akarjuk tanítani. Ez úgy szól, hogy ha $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \leqq \ldots \leqq b_n$, és a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sorozat a $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sorozat átrendezése, akkor $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqq a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$. Adjuk fel ezt az állítást ilyen megfogalmazásban: van egy halom tízezres, egy halom ötezres, egy halom kétezres, egy halom ezres, egy halom ötszázas és egy halom kétszázas. Az egyik halomból tizet, egy másikból nyolcat, egy harmadikból hetet, egy negyedikből hatot, egy ötödikből hármat, egy hatodikból kettőt szabad elvenni. Melyik halomból fogsz tizet, melyikből nyolcat, stb. elvenni? Nem nagyon lesz diák, aki elteveszti a helyes választ. Az egyenlőtlenség tehát

nyugodtan tanítható, ha van rá idő. Mint ismert, bizonyítása abból áll, hogy ha két c_i fordított sorrendben áll, akkor felcserélésükkel nő az $a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n$ összeg. Ehhez azt látjuk be, hogy ha $i < j$-re $c_i > c_j$, akkor $a_ic_i + a_jc_j < a_ic_j + a_jc_i$. Átrendezés után $(a_i - a_j)(c_i - c_j) < 0$, ami viszont igaz, hiszen az a_i-k ugyanúgy vannak rendezve, mint a b_i-k, a két kiválasztott c_i viszont fordítva. *Éppen a fenti algoritmus garantálja, hogy most már kész vagyunk.* Hiszen annak segítségével ilyen cserékkel eljuthatunk a c_i-k „összevissza" sorrendjétől a b_i-k jó sorrendjéig. Közben végig növeltük az összeget.

A 2. kérdés: Célhoz érünk-e mindig kevesebb cserével is? Most tehát a feladat: keressünk olyan sorrendet, amikor biztos sok cserére van szükség. Ha például fordított sorrendben állnak, akkor biztosan szükség van 15 (ill. $(n-1)/2$) cserére. De van-e rosszabb eset is? És ha nincs, valóban elég-e ennyi csere a sorrend helyreállításához, vagy kell annyi, amennyit az algoritmusaink használnak, 29 $(n-1)$? Erre a kérdésre már nehezebb a válasz.

Kézenfekvő a következő okoskodás: végül is ez az algoritmus minden lépésben legalább egy embert a helyére cserél, és ha vannak ketten, akik egymás helyén állnak, akkor azokat előbb-utóbb egyszerre cseréli a helyére, ennél jobb pedig nem várható. Hiszen csinálhatjuk a dolgot úgy is, hogy előbb ez utóbbi párokat cseréljük, ennél nyilván nincs jobb. Azután pedig nincs jobb, mint egy-egy embert a helyére cserélni. Igen ám, de ez megint a mohó algoritmus érvelése! Hátha jobb helyzetbe jutunk, ha pár lépésben egyáltalán nem cserélünk senkit a helyére, viszont elérjük, hogy utána sok új pár keletkezik, akiket egy-egy cserével a helyükre cserélhetünk. Ha például $n/4$ lépésben sikerülne $n/2$ ilyen párt létrehozni, akkor összesen $3n/4$ cserével is célhoz érnénk. Márpedig a mohó algoritmus az $n123\ldots(n-1)$ sorrendhez $n-1$ cserét használ. Ez bizony fogas kérdés, a megválaszolásához jobban meg kell ismerni a permutációk szerkezetét. Először be kell vezetni a *permutáció gráfját.* Ennek a gráfnak a pontjai a permutált elemek, általában a számok 1-től n-ig, és minden pontból pontosan egy nyíl indul ki abba a pontba, amelynek helyére az illető elem került.



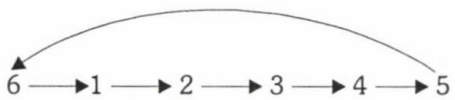
Ez például az 135246 permutáció gráfja.

Ezt a permutációt tehát így is felírhatjuk: (1)(2453)(6)

Három ciklusa van: két egyelemű és egy négyelemű.

A 2453 ciklust úgy is írhatjuk, hogy 4532, 5324, 3245.

A 612345 permutáció (123456) alakba írható, mert gráfja így néz ki:

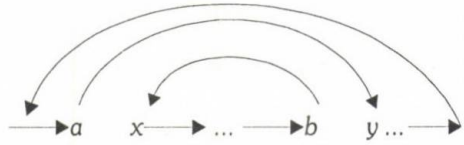


Fordítva, ha felírunk egy permutációt ciklikus alakjában, például (134)(25)(6), akkor felrajzolható a gráfja, és felírható a permutáció a számunkra ismerősebb alakban is: 451326

Most már csak azt kell meggondolni, hogy mi történik egy ilyen ciklikus felírásnál, ha két elemet, mondjuk a-t és b-t kicserélünk. Nyilvánvalóak a következők: azok a ciklusok, amelyek nem tartalmazzák sem a-t, sem b-t, nem változnak. Két eset lehet: a két kicserélt elem egy ciklusban van, vagy kettőben. Ha a két elem egy

ciklusban van, akkor valahogy így néz ki a ciklus:

Ha itt *a* és *b* helyet cserél, akkor az *a* elem most arra a helyre megy, ahova eddig *b* ment, tehát az *a*-ból induló nyíl most *b* jobboldali szomszédjába fog mutatni. Másrészt a *b*-ből induló nyíl most *a* jobb oldali szomszédjába fog mutatni. Ez a ciklus tehát két ciklusra szakad:



Ha viszont *a* és *b* két különböző ciklusban van, akkor éppen az alsó ábra az adott, és most cserével a felsőt kapjuk, tehát két ciklusból most egy lesz.

Ezek után gondoljuk meg, hogy mi a cél? A cél az, hogy elérjünk az 12... *n* permutációhoz. Ez a permutáció az (1)(2)... (*n*) permutáció, azaz *n* db egyelemű ciklusból áll. Egy csere maximum eggyel csökkenti a ciklusok számát, tehát ha egy permutáció *c* db ciklusból áll, akkor *n*–*c* cserére van szükség, hogy eljussunk a célhoz. Az olyan permutációk esetében, amelyek egy ciklusból állnak, $n - 1$ cserére van szükség, tehát a *mohó algoritmus a legrosszabb esetben optimális*. Sőt, *minden esetben* az, hiszen minden esetben egy elemet a helyére cserél, s ez rajzban azt jelenti, hogy *a* és *b* szomszédok, tehát a csere után lesz egy egyelemű ciklus és egy az eredetinél eggyel rövidebb ciklus. Tehát a mohó algoritmus minden lépésben két ciklust csinál egyből, azaz *minden esetben optimális.*

Itt tehát a mohó algoritmus a lehető legjobbat csinálja, de ennek bizonyítása sokkal mélyebb, mint maga az eljárás. Míg korábban az algoritmus minden állapotához egyszerűen a helyükön álló elemek számát rendeltük *állapotfüggvény-értékként*, most egy „cselesebb" állapotfüggvényt kellett bevezetni: az algoritmus minden állapotához most az aktuális permutáció ciklusainak számát rendeltük és erről mutattuk meg, hogy minden lépésben eggyel változik. Így nemcsak felső becslést kaptunk a szükséges lépésszámra, hanem annak pontos értékét kaptuk meg.

Okoskodásunk kiadta azt is, hogy *a)* minden olyan algoritmus optimális, amely minden lépésben legalább egy elemet a helyére rak;
b) de nemcsak az ilyen algoritmusok optimálisak minden esetben; vannak olyan algoritmusok is, amelyek például párosítják egy-egy ciklus elemeit és először kételemű ciklusokra bontják, majd a kételeműeket egy-egy eleműekre. Ha a ciklus az (12 ... *n*) – ezt most az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük –, akkor az 1-et az $n - 1$-gyel felcserélve „leválasztottuk" róla az (1,*n*) ciklust, a maradó ciklus a (23 ... $n - 1$), itt a 2-t az $n - 2$-vel felcserélve leválaszthatjuk a (2,$n - 2$) ciklust, és marad a (34 ... $n - 2$) ciklus. Ezt az eljárást folytatva $[(n - 1)/2]$ lépésben a ciklust $[n/2]$ db kételemű ciklusra (és páratlan *n* esetén egy egyeleműre) bontottuk. (A középső egy vagy két elemet nem kell cserélni.) Ezután $[n/2]$ lépésben a kételemű ciklusokat egy-egy cserével egyeleműekké alakíthatjuk. Összesen $[(n - 1)/2] + [n/2] = n - 1$ cserét használtunk.

Ez rögtön választ ad a 3. feladat kérdésére is. Az első $[(n - 1)/2]$ csere ugyanis végrehajtható szimultán, mert minden elem csak egy cserében szerepel. A második $[n/2]$ cserére is igaz ez. Tehát a 3. feladat megoldható *két lépésben*, legalábbis, ha egy ciklus van. De ha több ciklus van, azokban is végrehajthatjuk egyszerre az első cseréket is, a második cseréket is, hiszen minden ilyen csere a cikluson belül marad, tehát egymást nem zavarják meg a cserék.

Ha ezt a feladatot fel akarjuk adni, akkor érdemes először az $n(n - 1)$ ... 21 fordított sor-

rendre feladni, hiszen ennél egy lépés elég: minden i-re i-nek $n - i$-vel kell helyet cserélnie. Ezután a $n12 \ldots (n-1)$ sorrendre érdemes feladni: itt már csak két lépéssel megy: először helyén hagyjuk az elől álló n-et, és a többi sorrendjét felcseréljük, így a fordított sorrendet kapjuk. Ezután érdemes bonyolultabb, de egy ciklusból álló permutációra feladni, pl. az (13572468) permutációra, amely a 87123456 sorrendet jelenti. Ha ennél megtaláltattuk a kétlépéses megoldást, utána fel lehet vetni, hogy vajon mindig elég-e két lépés. Meg kell gondolni, hogy milyen helyzetet kell az első lépésben előállítani ahhoz, hogy a második lépésben minden a helyére kerüljön, vagyis milyen permutációkat lehet egy lépésben jó sorrendbe rakni. Nyilván azokat, amelyekben csak egy és kételemű ciklusok vannak. A kérdés tehát az, hogy egy lépésben elérhető-e, hogy ilyen permutációhoz jussunk. Ha a permutáció egy ciklusból áll, akkor ennek megoldását most már a tanulókra bízhatjuk. Már csak annak tisztázása marad, hogy az egyes ciklusokat egymástól függetlenül kezeljük, s ezzel a feladatot megoldottuk. Az is kijött, hogy egy lépéssel nem mindig oldható meg a feladat, hiszen vannak olyan permutációk, amelyekben vannak három, vagy többelemű ciklusok is.

Felvethető még az a kérdés, és pl. karácsonyi körbe-ajándékozásoknál fel is szokott merülni (bár ott eleve ki szokták zárni azokat a permutációkat, amelyekben van egyelemű ciklus, vagyis senki nem húzhatja saját magát), vajon hány olyan permutáció van, amikor ténylegesen szükség van $n - 1$ cserére, vagyis *hány olyan permutációja van* n *elemnek, amely egyetlen ciklusból áll?* Egy egyszerű ötlet adja a választ: írjuk a ciklusokat olyan sorrendben, hogy az egyes ciklusok legkisebb elemei növekedjenek, és minden ciklusban a legkisebb elem kerüljön leghátulra. Ezzel egyértelművé tettük a ciklusok végét, a zárójeleket tehát elhagyhatjuk. Az (1)(3)(245) permutációt például így írjuk: 13452. Ezzel a megállapodással a permutációkat egy-egyértelműen leképeztük az n hosszú sorozatokra. Vegyük például az 13527486 sorozatot. Az első ciklus nyilván 1-gyel végződik, tehát a permutáció (1)-gyel kezdődik. Az itt nem szereplő legkisebb szám a 2, tehát a 2-ig tart a második ciklus. Ez a (352) ciklus. Az eddig nem szerepelt legkisebb szám a 4, tehát a következő ciklus a (74) ciklus. Mivel az eddig nem szerepelt legkisebb szám a 6, a következő ciklus az utolsó: (86). Tehát a kódolt permutáció: (1)(352)(74)(86). Az eredeti permutáció pontosan akkor áll egyetlen ciklusból, ha az 1 az utolsó helyen áll, ami az esetek $1/n$-ed része. (Ha azt kérdezzük, hogy egy adott elem milyen valószínűséggel van k hosszú ciklusban, akkor ennek a valószínűsége is $1/n$, k értékétől függetlenül. Hiszen az illető elemet számozhatjuk 1-gyel, és az 1-et tartalmazó ciklus pontosan akkor k elemű, ha a kódban az 1 a k-adik helyen áll.)

Még nem válaszoltunk arra a kérdésre, hogy mennyi az algoritmusunk *átlagos lépésszáma* és mennyi a *szükséges átlagos lépésszám*. Ez utóbbi azonos azzal a kérdéssel, hogy átlagosan hány ciklus van egy permutációban. A fenti megjegyzés szerint egy adott elemet tartalmazó k hosszú ciklusok száma $(n-1)!$, az összes elemre ez $n!$, de így minden ciklust k-szor (a ciklus hosszaszor) számoltunk, vagyis k hosszú ciklusból $n!/k$ van. (Ez számolással is kijön: adott k elemből álló ciklus $(k-1)!$ van, ilyet tartalmazó permutáció $(k-1)!\,(n-k)!$ van, ezt megszorozva a lehetséges k-asok számával megint $n!/k$-t kapunk.) Eszerint az összes ciklusok száma az összes permutációban $n!\ \Sigma\ (1/k)$, vagyis az átlagos ciklusszám $\Sigma\ 1/k \sim \ln n$.

Az 1. feladat és a rá adott mohó algoritmus izgalmas matematikai kérdésre vezet, másrészt szükség lehet rá, ha az átrendezéses egyenlőtlenséget bizonyítjuk (és nemcsak ott). De a számítógépes algoritmusok tervezésénél nem jön elő ilyen formában a probléma, ha az elemek eleve adott sorrendjét jól tároljuk a beolvasásnál.

A 4. feladat annál inkább számítógépes alapprobléma. Itt tehát *nem ismerjük előre az elemek sorrendjét.* Ez azt jelenti, hogy az előző feladatoknál tudtuk, melyik elem hanyadik a jó sorrendben, itt viszont nem tudjuk. Az előbbire példa a nagyság szerinti sorrend, a „torna-sor", az utóbbira példa egy olyan helyzet, amikor n tárgyat kell súly szerint sorba tennünk, de csak egy kétkarú mérleg van súlyok nélkül. Az egyes súlyokat tehát nem tudjuk megmérni, csak kettőt összehasonlítani tudunk. A 4. feladatban *a tárgyak valahogyan sorba vannak téve és csak két szomszédos összehasonlítása és szükség esetén a cseréje megengedett.*

1. kérdés: Megadható-e olyan algoritmus, amely mindig célhoz ér?

2. kérdés: Mennyi az algoritmushoz használt lépések száma a legrosszabb esetben?

3. kérdés: Optimális-e ez a lépésszám?

Az 1. feladat cseréi lebonthatók szomszédos cserékre, így látszólag egyszerű az igenlő válasz: egyszerűen „bontsuk le" az ott használt két algoritmus cseréit ilyen kisebb cserékre. Csakhogy ehhez eleve kellene ismerni az elemek sorrendjét, de ez most nem áll rendelkezésünkre.

Kézenfekvő a következő eljárás: elindulunk az egyik végéről, és az első rossz sorrendben álló párt megcseréljük, majd kezdjük elölről. Vizsgáljuk meg, hogyan működik ez az algoritmus.

Az első lépésben összehasonlítja az első párt, és ha rossz sorrendben állnak, kicseréli őket. Ezután újra az első párt kell összehasonlítania, *de ez felesleges.* A következő lépés, hogy összehasonlítja a második és harmadik elemet, és ha fordított sorrendben állnak, kicseréli őket. A következő lépésben az első két elemet kell összehasonlítania, és ha fordított a sorrendjük (ez lehetséges!), akkor kicseréli őket. Most újra az első két elemet kell összehasonlítani, *de ez felesleges,* mert biztos jó a sorrendjük. Utána a második és harmadik elemet kell összehasonlítania, de *ez is felesleges,* mert ezek is jó sorrendben állnak. Ugyanis *az első csere után az első két elem van helyes sorrendben, most pedig az első három elem.*

Az algoritmust tehát egyszerűsíthetjük.

1. CIKLUS: Az első két elemet összehasonlítjuk, és ha kell, kicseréljük.

2. CIKLUS: A harmadik és második elemet, majd a második és az első elemet hasonlítjuk össze és cseréljük szükség esetén.

3. CIKLUS: A negyedik és harmadik, majd a harmadik és második, majd a második és első elemet cseréljük ki, és cseréljük szükség esetén.

i-EDIK CIKLUS: Az $i + 1$-edik és i-edik elemet, majd az i-edik és $i - 1$-edik elemet, stb. hasonlítjuk össze és cseréljük szükség esetén, vagyis az $i + 1$-edik elemet „lecsurgatjuk" a helyére. Amikor kész vagyunk, i értékét növeljük eggyel. i értéke 1-től $n - 1$-ig változhat.

Ez az algoritmus már nem annyira mohó. Célszerű volt kis ciklusokra bontani. Mint már korábban is, itt is *rekurzióval* definiáltuk. Ez azzal az előnnyel is jár, hogy át tudjuk tekinteni, mit értünk el egy-egy ciklus végén. Az i-edik ciklus végén az első $i + 1$ elem sorba van rendezve. A következő ciklus a következő elemet szúrja be a helyére.

Az algoritmust *gyorsíthatjuk* azzal, ha a ciklust befejezzük akkor, amikor az első olyan összehasonlításhoz érünk, ami után nem kell cserélni. Ez az algoritmus már majdnem az ismert – vagy legalábbis ismert nevű – BUBORÉK-ALGORITMUS. Ez a legtöbb algoritmusokról szóló könyvben megtalálható, így itt csak röviden ismertetem. De előbb még választ kell adnunk a 2. és 3. kérdésre.

Az algoritmus lépésszáma. Az i-edik ciklusban i db összhasonlítást végzünk, a gyorsított algoritmusnál pedig maximálisan ennyit, tehát maximálisan i cserét végzünk az i-edik ciklusban. A ciklusok száma n elem esetén $n - 1$. Ez $n(n - 1)/2$ csere maximálisan. Ha az elemek fordított sorrendben állnak, akkor az algoritmus valóban minden lépésben végre is hajt egy-egy

cserét. Tehát a 2. kérdésre $n(n-1)/2$ a válasz. A gyorsított algoritmus esetében is.

Másrészt ugyanez a permutáció mutatja, hogy van olyan eset, a fordított sorrend, amelynél *bármely algoritmusnak szüksége van ennyi cserére.* Ugyanis a fordított sorrendben az *inverziók száma* pontosan ennyi, *és egy csere pontosan egy inverziót szüntet meg.* (Ez megint az *állapotfüggvényes okoskodás!)* Itt tehát természetesen vezethető be az *inverzió* fogalma, amire a determinánsoknál is szükség van.

Ebből az is következik, hogy bármely olyan algoritmusnak, amely csak akkor cserél, ha szükség van rá (az összehasonlított elemek sorrendje fordított), ugyanannyi cserére van szüksége. Viszont az összehasonlítások száma lehet jóval nagyobb, mint azt az első algoritmusnál láttuk. A megadott algoritmus ebből a szempontból is lényegében optimális. A gyorsított algoritmus esetében a cserék száma egyenlő az inverziók számával, tehát a szükséges cserészámmal, az összehasonlítások száma ennél maximum n-nel több. Az átlagosan szükséges cserék száma az inverziók átlagos száma, ami $n(n-1)/4$, a párok számának fele. A szükséges összehasonlítások száma az átlagtól tehát ennél nagyságrenddel kevesebbel tér el.

A megadott algoritmustól csak kevésben különbözik a BUBORÉK-ALGORITMUS: Itt az i-edik ciklusban összehasonlítjuk és szükség esetén cseréljük az első kettő, majd a második és harmadik, stb., végül az $n-i$-edik és $n-i+0+1$-edik elemet. $i = 1,2, \ldots n-1$.

Ha most végiggondoljuk, hogy mit érünk el az i-edik ciklusban, akkor világos, hogy az első végén a legnagyobb elem kerül a helyére (az n-edik helyre), a következőben a második legnagyobb, az i-edik ciklusban az i-edik legnagyobb elem. Tehát ez az algoritmus is rendezi az $n-1$-edik ciklus végére az elemeket (ha $n-1$ elem a helyén van, akkor az n-edik is). A szükséges összehasonlítások száma itt minden esetben a maximális $n(n-1)/2$, ez több, mint az előzőnél.

Mind a két algoritmus nagyon egyszerűen kivitelezhető kis helyen. Csak az összehasonlításhoz kell hely, és plusz egy hellyel megoldható a csere. A BUBORÉK esetében nem sok további szervezésre van szükség, csak a ciklus számát és azon belül a lépés számát kell számon tartani. Az első algoritmusnál viszont azt kell megjelölni, hogy a ciklust hol kezdtük, és a következőt eggyel előbb kell kezdeni.

Az 5. FELADAT. Ismét n elemet kell sorbarendezni. Kezdetben nem ismerjük a sorrendjüket. A megengedett lépés: két elemet összehasonlítunk, és ha kell kicserélünk.

Nyilvánvaló, hogy ha minden elemet minden elemmel összehasonlítunk, akkor megkapjuk a sorrendet, tehát a cél az adott művelet segítségével elérhető.

A következő CÉL: Az összehasonlítások számát minimalizálni.

a) Először feladhatjuk kis elemszámra. 1 elem esetén nincs összehasonlításra szükség. Két elem esetén elég egy. Három elem esetén egy összehasonlítással sorba rendezünk két elemet, most a harmadikat kell beszúrni még közéjük. Ezt két összehasonlítás után meg tudjuk tenni. Ez összesen három összehasonlítás. De nem elég-e kettő is?

Célszerű eljátszatni. „Én kérdezek, ti válaszoltok úgy, hogy nekem minél rosszabb legyen." Az első kérdés előtt hat lehetőségem van. A kérdéssel két részre vágom a lehetőségeket. A nagyobb (nem kisebb) lehetőség-halmazt választhatjátok. Így még legalább három lehetőség maradt és csak egy kérdésem marad. Ezzel 2-1 felosztást tudok csak létrehozni, és ti nyilván azt válaszoljátok, amire két lehetőség marad. Tehát: két összehasonlítás nem elég.

Ugyanezt eljátszhatjuk négyre is. Kezdetben 24 lehetőség van, az első összehasonlítás után marad legalább 12, a második után legalább 6, a harmadik után legalább 3, és a negyedik után – ha ügyesen válaszoltok – kettő. Tehát öt kérdés kell a rossz esetben. Ennyivel megy is: három ösz-

szehasonlítással sorba rendezek három elemet, majd a negyediket összehasonlítom a középsővel. Ha nagyobb a középsőnél, akkor a legnagyobbal is összehasonlítom, ha kisebb, akkor a legkisebbel is. Ezután már a helyére tudom tenni.

Vajon mit várhatunk öt elemre? A fenti gondolatmenettel legalább 7 összehasonlításra szükség van. Viszont a „beszúrásos" megoldás csak 8 összehasonlítással vezet célhoz. Nem is olyan könnyű hét összehasonlítással célhoz érni. Érdemes megpróbálkozni vele, mert lehet.

Nézzük, mit várhatunk általában? Kezdetben $n!$ lehetőség van. Egy összehasonlítás – jó esetben – felezi a lehetőségek számát, vagyis $\log_2 n!$ összehasonlításnál kevesebb nem elég. Másrészt nézzük meg, mi érhető el a BESZÚRÁSOS algoritmussal általában. A feladat tehát az, hogy *adva van* k *elem sorba rendezve, be kell szúrni a helyére egy* $k+1$*-edik elemet.* Ez a jól ismert játék, már alsó tagozaton is szokták játszani. Első lépésben a(z egyik) középsővel kell összehasonlítani. Ha pl. annál nagyobb, akkor már csak a felső felébe kell beszúrni, és most erre a $[k/2]$ elemre kell alkalmazni ugyanezt a felezéses eljárást. Ez lényegében $\lceil \log_2 (k+1) \rceil$ lépés. Ezt kell minden k-ra alkalmazni $k = 2, 3, \ldots, n$-re, és ez lényegében $\log_2 n!$, az eltérés legfeljebb n nagyságrendű, ami kisebb.

Számtalan további érdekes és a számítástechnikában használt probléma van itt a rendezések terén. Befejezésül ezek közül említek meg röviden néhányat, amely közismert *feladat,* ezért érdemes matematika órán foglalkozni vele, és elemezni.

6. FELADAT. Most sem ismerjük az elemek sorrendjét, a megengedett lépés most is két elem összehasonlítása, de most nem teljes sorrendet akarunk, csak a legjobbat akarjuk kiválasztani. Ez persze simán megy több ismert módszerrel is: kihívásos (ökölvívó) verseny, egyenes kieséses rendszer. Mindegyik $n-1$ összehasonlítással adja ki a legjobbat n versenyző esetén. És megint világos, hogy kevesebb nem elég, hiszen amíg van két olyan versenyző, aki nem vesztett, addig bármelyikük lehet a legjobb, vagyis $n-1$ versenyzőnek kell veszítenie, s ehhez ennyi mérkőzés kell.

Megkérdezhetjük azt is, hogy hány mérkőzésre van szükség, ha *a második legjobbat is ki akarjuk választani?* Ez a kérdés például megtárgyalható a középiskolában normál osztályban is, legalábbis konkrét résztvevőszám esetén. Ha kieséses versenyt rendezünk, akkor a második legjobb csak az lehet, aki a legjobbtól kapott ki. (Feltettük, hogy egyértelmű az erősorrend). Ha 2^n versenyző van, akkor n fordulóban ki lehet választani a legjobbat, s így a legjobb n versenyzőt ver meg. Ezek közül kell kiválasztani a legjobbat, ami újabb $n-1$ mérkőzéssel megy. Tehát 2^n elem közül $2^n + n - 2$ összehasonlítással a két legnagyobb (legjobb) is kiválasztható. Az eljárás megszervezése egy nevezetes adatstruktúrához is elvezet.

További érdekes kérdés, hogy hány mérkőzés kell *a legjobb és a legrosszabb kiválasztásához.* Ha $2n$ versenyző van, akkor először párosítjuk őket, ez n mérkőzés. A győztesek a legjobb, a vesztesek a legrosszabb „címéért" játszanak. Mindkét címre n pályázó van, ezek közül $n-1$ mérkőzéssel ki lehet választani a legjobbat, ill. a legrosszabbat. Ez $3n-2$ mérkőzés. Amilyen egyszerű feladat volt ennek bizonyítása, annyival nehezebb annak bizonyítása, hogy kevesebb mérkőzés nem is elég. Ügyes állapotfüggvényre van hozzá szükség.

Eddig feltettük, hogy egyértelmű erősorrend van, és az időtől független. Ez utóbbit most is feltesszük, de most azt kérdezzük: mi van akkor, ha vannak „körbeverések" is. Hogyan állapíthatjuk meg, hogy van-e egyértelmű legjobb? Hány mérkőzés szükséges ennek eldöntésére? Ezeknek a kérdéseknek utána lehet olvasni például Gács és Lovász már idézett *Algoritmusok* c. könyvében. Az én célom csak az volt, hogy kedvet csináljak az algoritmusok és a rendezések tanításához.

Az 1998. évi Beke Manó Emlékdíjasok

A Bolyai János Matematikai Társulat 1998-ban a **Beke Manó Emlékdíj I. fokozatával** tünteti ki

Békefi Zsuzsát, a veszprémi Lovassy László Gimnázium tanárát;

a **Beke Manó Emlékdíj II. fokozatával** tünteti ki

Cselyuszka Antalnét, a székesfehérvári Hétvezér Általános Iskola tanárát,

Csordás Mihályt, aki jelenleg a kecskeméti Berkes Ferenc Szakközépiskolában tanít, korábban a Zrínyi Ilona Általános Iskola tanára volt,

Doleszák Magdolnát, a rátkai Általános Iskola tanárát,

Freller Miklóst, a dombóvári Illyés Gyula Gimnázium tanárát,

Róka Sándort, a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskola docensét és

Szilágyiné Oravecz Mártát, a Fővárosi Pedagógiai Intézet vezető tanítóját.

Békefi Zsuzsa, az ELTE TTK matematika-fizika szakának elvégzése után tanári pályáját a keszthelyi gimnáziumban kezdte, majd a veszprémi Lovassy László Gimnáziumba került, ahol jelenleg is dolgozik. Itt elsősorban a speciális matematika tagozaton tanít.

Kitűnő szakmai felkészültsége, állandó önképzése, tevékenységének kritikus elemzése, elhivatottsága, lelkiismeretessége és megnyerő egyénisége együttesen magyarázzák a matematikatanításban elért kiváló eredményeit. Hamarosan tekintélyt szerzett tanártársai körében. Szélesebb körben is ismertté tették őt a matematika tagozatos osztályok tanárainak tartott bemutató órái. Húsz éve tagja az országos egyetemi írásbeli felvételi vizsgabizottságnak. Lektorálta az Egyetemi Felvételi Feladatok Matematikából című sorozat köteteit, ezt a munkát a sorozat szerzője, Scharnitzky Viktor, az egyik kötet előszavában külön is nagyra értékelte. Többször szerepelt előadóként a TIT Kis Matematikusok Baráti Köre mozgalmának országos tanári rendezvényei. Sok éve rendszeresen tart megyei előkészítő és tehetséggondozó szakköröket. Részt vesz Veszprém megyében a tanártovábbképzésben is. Gráfelmélet példatárat állított össze, amely a Veszprém megyei Pedagógiai Intézet gondozásában jelent meg.

Hosszú éveken keresztül a BJMT Oktatási Szakosztályának alelnökeként, majd elnökeként kiemelkedő munkát végzett a Rátz László Vándorgyűlések programjainak kialakításában és megszervezésében. A szakosztály munkájának irányítását töretlen lelkesedéssel, igen sok ötlettel és új, hasznos kezdeményezésekkel végezte egészen 1996-ig, amikor megszaporodott iskolai feladatai miatt már nem tudta tovább vállalni ezt a munkát. Iskolájában a pedagógiai munkaterv elkészítése mellett kidolgozta az ott indítandó hatosztályos gimnázium matematika tantervét, és irányította az ezzel kapcsolatos szervező munkákat. 1997-ben figyelemfelhívó, gondolatébresztő tanulmányt írt a tervbe vett kétszintű matematika érettségi vizsga várható eredményeiről az eddigi egységes rendszer tapasztalatai alapján, ezzel is segítve a reform zökkenőmentes életbeléptetését. 1998-ban Veszprémben Brusznyai-díjat kapott kiváló tanári munkája elismeréseként.

Cselyuszka Antalné matematika-fizika szakos általános iskolai tanár, több mint 30 éve dolgozik a pedagógus pályán; 19 évig falusi iskolában tanított matematikát és fizikát, 1982-től a székesfehérvári Hétvezér Általános Iskola tanára. Az 1988/89-es tanévtől elsőként vállalta a városban akkor induló matematika tagozatos

ötödik osztály tanítását. Erre tudatosan készült, továbbképzéseken vett részt, és tapasztalatcsere látogatásokat tett az ország számos matematika tagozatos iskolájában.

Cselyuszka Antalné szakmai tudásával és a tanulókkal történő odaadó foglalkozásával sokat tett a gyerekek tehetségének kibontakoztatásáért. Mind az általános tanterv szerint tanuló, mind pedig tagozatos tanítványai között igen sok olyan található, akik általános iskolai versenyeken, majd később a középiskolában és az egyetemen is kiemelkedő teljesítményt nyújtottak a matematika és a természettudományok területén.

Csordás Mihály, a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskola elvégzése után főleg általános iskolákban tanított. A '80-as években a kecskeméti Zrínyi Ilona Általános Iskolában ő vezette be a számítástechnika oktatását. A '90-es években elindította, majd országosan is megszervezte az egyre népszerűbb Zrínyi Ilona matematikai versenyt. A Zrínyi-verseny szervezőbizottságának elnöke, továbbá szerkesztője a verseny feladatait és azok megoldásait évente – példás gyorsasággal – megjelentető kiadványnak. Rendszeres előadója a Mozaik Oktatási Stúdió által szervezett Módszertani Napoknak, és a Rátz László Vándorgyűlésen is vezetett feladatmegoldó szemináriumot.

Iskolájában „házi használatú" tantervet dolgozott ki, és néhány kollégájával közösen értékes feladatgyűjteményt állított össze. Tanítványai rendre sikeresen szerepelnek a különböző matematikai versenyeken.

Doleszák Magdolna, a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskolán szerzett matematika tanár szakos oklevelet. Hosszú időn keresztül tanított szülőfalujában, Mádon, két évig tanulmányi felügyelőként is tevékenykedett. 1991 óta a rátkai Általános Iskola tanára.

Önképzéssel, komplex továbbképzésekkel rendszeresen gyarapítja ismereteit. Minden eszközt megragad, hogy a gyerekek számára közelebb hozza, színesebbé és érdekesebbé tegye a matematikát és annak tanulását. Mind a tanulók felzárkóztatására, mind pedig a tehetségek gondozására speciális fejlesztő feladatsorokat dolgozott ki, egyik fóliasorát megyei újításként is elfogadták. Kis Matematikusok Baráti Köre szakkört vezetett, rendszeresen részt vesz szaktáborok szervezésében és lebonyolításában. Az országos fórumokon felkérésre többször tartott sikeres módszertani előadásokat. Bemutató óráit a kis falvak tanárai mellett az ELTE neves külföldi vendégtanárai is nagyra értékelték.

Freller Miklós matematika-fizika szakos középiskolai tanár, 1970 óta tanít a dombóvári Illyés Gyula (korábban Gőgös Ignác) Gimnáziumban. 22 éve vezeti kiválóan és nagy odaadással a Tolna megyei I. és II. osztályos gimnazisták központi szakkörét. A BJMT Tolna Megyei Tagozatának vezetőségi tagja, a középiskolai versenyek felelőse, az Arany Dániel verseny megyei középbizottságának tagja.

Freller Miklós sokoldalú és nagyhatású tanáregyéniség, mindkét szakját kimagasló szakmai felkészültséggel tanítja. Nevéhez fűződik a Dombóvárón működő speciális matematika tagozatos osztályok és a hozzájuk kapcsolódó szakmai rendezvények megszervezése. A megyében rendszeresen tart tanártovábbképzést, ehhez több témakörből igényes feladatsorokat készített. Emellett atom- és magfizikai példatárat állított össze, amely a közeljövőben országos terjesztésben is megjelenik.

Róka Sándor, a KLTE-n szerzett matematikusi és matematika tanári diplomát. 3 évig középiskolában tanított, 1985-től dolgozik a Bessenyei György Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékén. 1997-ben lett főiskolai docens. 1983-ban és 1984-ben is 3. díjas lett a BJMT Matematikatanárok Versenyén. 1985-től tart tehetséggondozó városi szakkört. Különböző lapokban 20-nál több tehetséggondozással, szak-

köri munkával kapcsolatos cikke jelent meg. Megyei matematikaversenyek feladatsorainak összeállítását végzi évek óta. A Rátz László Vándorgyűlésen többször vezetett feladatmegoldó szemináriumot, s gyakran szerepel előadóként tanártovábbképzéseken is. 1992-ben jelent meg az 1000 feladat az elemi matematika köréből című feladatgyűjteménye. Azóta további könyvei is megjelentek, amelyek szintén a tehetséggondozást segítik.

1990-től kezdve minden tanévben megszervez egy nyolcfordulós feladatmegoldó pontversenyt 10–14 éveseknek. Ezen az országos levelező tehetséggondozó versenyen a résztvevők száma 1000 körül szokott lenni. 1994 őszén beindította az Abacus, Matematikai Lapok 10–14 éveseknek című lapot, s ettől kezdve az Abacus ad teret a pontversenynek. A lapban fizika, sakk és más rovatok és versenyek is vannak.

Szilágyiné Oravecz Márta, a budapesti Tanítóképző Főiskolán szerzett tanítói oklevelet. 1994-ig a XV. kerületi Czabán Samu Általános Iskolában tanított, azóta a Fővárosi Pedagógiai Intézet vezető tanítója. Tanítói munkájának legalapvetőbb vonása a gyerekek okos szeretete, gyermekségük elfogadása és tisztelete. Alapvetően nagy gonddal építi minden tanítványának ismeretrendszerét, fogalmait, fejleszti képességeiket, készségeiket. Nincs olyan növendéke, akiben ne találná meg az értéket, nincs, akiről lemondana.

Társszerzője az 1. és 2. osztályos tankönyvcsaládnak. Több sikeres tanfolyamot vezetett, a Rátz László Vándorgyűlésnek is többször volt előadója. Részt vesz a Budapesti Tanítóképző Főiskola hallgatóinak gyakorlati képzésében. Szakmai igényessége, pszichológiai-, pedagógiai-, matematikai felkészültsége és színes, egyedülálló módszertani eszköztára nagy hatást gyakorol hallgatóira és kollégáira egyaránt.

Dr. Urbán János

Beszámoló a VII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyről

A VII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyt 1998. április 22–26-ig *Szabadkán* rendezték meg a Vajdasági Magyar Pedagógus Szövetség és Szabadka Város Önkormányzata támogatásával. A szervezők, *Szabó Magda* tanárnő és *Kucsera Géza* tanácsos mindent elkövettek, hogy az öt országból jött, közel 280 versenyző és tanár igazán jól érezze magát. Vendégszeretetük, gondoskodásuk eredményeként a vendégek sok élményt érdekes, izgalmas találkozásokat, tapasztalatokat vihettek magukkal.

Az ünnepélyes megnyitó a városháza gyönyörű dísztermében volt, ahol Kasza József, Szabadka polgármestere is köszöntötte a résztvevőket.

A szabadkai gimnázium dísztermében hallgatták meg a versenyzők *Cofman Judit* érdekes, színes matematika előadását.

A verseny április 24-én, 9 órától 13 óráig tartott.

A versenyzőknek mind a négy évfolyamon 6-6 feladatot kellett megoldani. A feladatjavaslatokat a már kialakult rend szerint küldték be a

tanárok, és ezekből a beküldött javaslatokból Reiman István és Urbán János válogatta ki a versenyre szánt feladatokat.

A 24-i délután az évfolyamokon a kísérő tanárokból álló versenybizottság a dolgozatokat javította. A 9. évfolyamon a bizottság Neubauer Ferenc munkácsi tanár vezetésével dolgozott, a 10. évfolyam bírálóbizottságát Oláh György (Rév-Komárom) tanár úr irányította, a 11. évfolyamon dr. Hortobágyi István, a budapesti ELTE docense vezette a javítás munkáját, a 12. évfolyamon pedig Bencze Mihály brassói tanár vezetésével dolgozott a tanárokból álló csapat. A versenybizottság elnöke Urbán János volt.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre a szabadkai Népkörben került sor április 26-án délelőtt.

Az egyes évfolyamok díjazott versenyzői a következők:

IX. évfolyam

I. díjas: *Mészáros Karola* (Belgrád)

II. díjasok: *Nagy Dávid* (Debrecen), *Pesti Gábor* (Nagykanizsa), *Veres Péter* (Székelyudvarhely)

III. díjasok: *Lovrics Anna,* (Budapest, Berzsenyi G.), *Csergely Éva* (Csíkszereda) *Mezei Tímea* (Sepsiszentgyörgy)

X. évfolyam

I. díjasok: *Demeter Albert* (Székelyudvarhely), *Tóth Ferenc* (Beregszász)

II. díjas: *Zágrádi Gergely* (Győr)

III. díjasok: *Vitos Botond* (Sepsiszentgyörgy), *Hegyi Géza* (Csíkszereda), *Vízer Máté* (Budapest, Fazekas G.)

XI. évfolyam

I. díjasok: *Horváth Gábor* (Debrecen), *Devecseri András* (Budapest Fazekas G.)

II. díjasok: *Hubenkó Elemér* (Beregszász), *Zsombori Vilmos* (Csíkszereda)

III. díjasok: *Lukács László* (Miskolc), *Végh László* (Debrecen), *Szőcs Zoltán* (Csíkszereda)

XII. évfolyam

I. díjasok: *Kaslik Éva* (Arad), *Hartmann Miklós* (Bonyhád), *Zawadowski Ádám* (Budapest, Fazekas G.)

II. díjasok: *Szeles Tamás* (Szeged), *Pogány Ádám* (Budapest, Fazekas G.)

A versenyen a következő feladatokat tűzte ki a versenybizottság:

IX. évfolyam

1. Ismeretes, hogy

$$35! = 10333147966386144929ab66513375232000000000$$

Milyen számjegyek állnak az *a* és *b* helyén?

Szabó Magda, Szabadka

2. Az *AFE* hegyesszögű háromszög *ED* és *FB* magasságvonalai a *C* pontban metszik egymást. Az *M, N, P, Q* pontok rendre az *FC, EC, AE* és *AF* szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy az *MNPQ* négyszög téglalap!

Kórizs Júlia, Bácskatopolya

3. Határozzuk meg a következő egyenlőtlenségrendszer összes megoldását a pozitív valós számok halmazán:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} \leqq 2,$$
$$x_2 + \frac{1}{x_3} \leqq 2,$$
$$\ldots$$
$$x_{1997} + \frac{1}{x_{1998}} \leqq 2,$$
$$x_{1998} + \frac{1}{x_1} \leqq 2.$$

Oláh György, Révkomárom

4. Az $A_1A_2\ldots A_n$ és $B_1B_2\ldots B_n$ szabályos n-szögek úgy metszik egymást, hogy az A_1A_2 és B_nB_1 oldalak közös pontja K_1, az A_1A_2 és B_1B_2

közös pontja K_2, az A_2A_3 és B_1B_2 közös pontja K_3, A_2A_3 és B_2B_3 közös pontja K_4, ..., A_nA_1 és $B_{n-1}Bn$ közös pontja K_{2n-1}, A_nA_1 és B_nB_1 közös pontja K_{2n}. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{A_1K_1}{B_1K_1}\cdot\frac{B_1K_2}{A_2K_2}\cdot\frac{A_2K_3}{B_2K_3}\cdot\frac{B_2K_4}{A_3K_4}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{A_nK_{2n-1}}{B_nK_{2n-1}}\cdot\frac{B_nK_{2n}}{A_1K_{2n}}=1$$

(A K_i pontok az oldalak belső pontjai $i = 1, 2, \ldots, 2n$.)

Bencze Mihály, Brassó

5. Egy négyzet alakú, 1998×1998 egybevágó, négyzet alakú mezőből álló táblán 1997 mezőt már befestettek. Befesthető minden olyan, eddig még be nem festett mező, amelynek legalább két szomszédja már be van festve. Két mezőt akkor tekintünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk. Bizonyítsuk be, hogy az egész táblát nem lehet befesteni.

Balázsi Borbála, Beregszász

6. Nevezzük „szépnek" az a^2+2b^2 alakú számokat, ahol a és b pozitív egész számokat jelöl. Bizonyítsuk be, hogy az így értelmezett „szép" számok közül akárhányat összeszorozva újra „szép" számot kapunk!

Kiss Sándor, Nyíregyháza

X. évfolyam

1. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=a+b\sqrt{2}$$

Kórizs Júlia, Bácskatopolya

2. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16}$$

tört nem egyszerűsíthető!

Balázsi Borbála, Beregszász

3. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész x, y, z számokból álló számhármast, amelyre teljesül a következő két egyenlet:

$$x^3+3y^3+z^5+z=1998,$$
$$y^2z=x.$$

Oláh György, Révkomárom

4. Legyen d egy A kezdőpontú félegyenes és α egy olyan változó szög, amely 0° és 90° között minden értéket felvesz. A d félegyenesen úgy választjuk ki a B pontot, hogy $AB = \operatorname{tg}\alpha$ teljesüljön és úgy szerkesztjük meg AB fölé az ABC háromszöget, hogy $BAC\sphericalangle = \alpha$, $AC = \sin\alpha$ teljesüljön. Mit írnak le a C pontok, ha α minden lehetséges értéket felvesz?

Kovács Béla, Szatmárnémeti

5. Egy háromszög oldalainak a, b, c mértékszámai egész számok, és tudjuk, hogy az egyik magasság a másik két magasság összegével egyenlő. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2$ négyzetszám!

Katz Sándor, Bonyhád

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$n^{4(x_1^2+x_2)}+n^{4(x_2^2+x_3)}+\ldots+n^{4(x_n^2+x_1)}=1$$

ahol $n \geqq 2$, egész szám.

Bencze Mihály, Brassó

XI. évfolyam

1. Adottak az a_1, a_2, a_3, ..., a_{37}, b_1, b_2, b_3, ..., b_{37}, c_1, c_2, c_3, ..., c_{37}, egész számok. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan i, j, k egész szám, hogy $i \neq j$, $i \neq k$, $j \neq k$, $1 \leqq i, j, k \leqq 37$, továbbá $\frac{a_i+a_j+a_k}{3}$, $\frac{b_i+b_j+b_k}{3}$ valamint $\frac{c_i+c_j+c_k}{3}$ is egész!

Kiss Sándor, Nyíregyháza

2. Igazoljuk, hogy bármely háromszögben érvényes a

$$\frac{bc}{\varrho_a^2}+\frac{ac}{\varrho_b^2}+\frac{ab}{\varrho_c^2}\geqq\frac{abc}{2\varrho T}$$

egyenlőtlenség, ahol a, b, c a háromszög oldalai, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c a megfelelő oldalakhoz hozzáírt körök sugarai, ϱ a háromszögbe írható kör sugara, T pedig a háromszög területe.

Oláh György, Révkomárom

3. Adottak az a, $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + (n-1)d$ pozitív egész számok ($n > 1$, egész). Igazoljuk, hogy ha az adott számok egyike sem osztható n-nel, akkor n és d nem relatív prímek!

Zolnai Irén, Újvidék

4. Egy derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyeztünk el végtelen sok téglalapot, hogy mindegyiknek egyik oldala az x, egy másik oldala az y tengelyre illeszkedjék. A téglalapok origóval szemközti csúcsának koordinátái egész számok. Mutassuk meg, hogy van a téglalapok között két olyan, amelyek közül egyik tartalmazza a másikat!

Bogdán Zoltán, Cegléd

5. Legyenek $k \geqq 1$, $n \geqq 2$ adott egész számok.

Számítsuk ki

$$\left(\sqrt[n]{k} - \sqrt[n]{k+1} + \sqrt[n]{k+2}\right)^n$$

egész részét (egy x szám egész része az a legnagyobb egész szám, amely nem nagyobb x-nél)!

Bencze Mihály, Brassó

6. Adottak a 2, 3, 4, ..., 1998, 1999 számok és a belőlük képzett összes különböző tényezőkből álló két, három, ..., 1998 tényezős szorzat (összesen $2^{1998} - 1$ szám). Mutassuk meg, hogy ezen számok reciprokainak összege egész szám!

Katz Sándor, Bonyhád

XII. évfolyam

1. Melyek azok a valós számokon értelmezett, valós értékű f függvények, amelyek minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén kielégítik az

$$x \cdot f(y) = y \cdot f(x)$$

egyenletet?

Árokszállási Tibor, Paks

2. Oldjuk meg az

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{6z} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}}$$

$$x + y^2 + z^3 = 14$$

egyenletrendszert a pozitív valós számok halmazán!

Neubauer Ferenc, Munkács

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet összes gyöke valós szám, akkor

$$a^2 \geqq 3b$$

(a, b, c adott valós számok)

Oláh György, Révkomárom

4. Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének sugara r, köréírható gömbjének sugara R. Igazoljuk, hogy

$$\frac{R}{r} \geqq \sqrt{2} + 1$$

Szabó Magda, Szabadka

5. Az (a_n) valós számsorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = a_2 = 2 \text{ és } a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \text{ ha } n \geqq 2.$$

Igazoljuk, hogy bármely $k \geqq 1$ esetén

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_1 = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

6. Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán az

$$x + y + z = xyz$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

egyenletrendszert!

Bencze Mihály, Brassó

Honti Dénes

Egy francia érettségi feladatsorozat

Franciaországban a gimnázium (líceum le lycée) tanulói választhatnak, hogy az utolsó két éven humán (irodalmi, L), természettudományos (S) vagy gazdasági (E) ágazaton folytatják tanulmányaikat. A tanulók az egyes ágazatokba választásuk és addigi eredményeik alapján kerülnek egy egyeztetési eljárás során.

A matematika mindegyik ágazaton kötelező tárgy. Az anyag mindenütt tartalmazza a valószínűségszámítás, a matematikai statisztika és az analízis elemeit. A diák mindegyik ágazaton vehet fel fakultatív (speciális) matematika órákat is. Itt a kötelező tárgykörök elmélyítése mellett a komplex számok és az elemi lineáris programozás is szerepel.

Az alábbi 1996. évi, gazdasági ágazaton szereplő feladatsorozat. Itt az utolsó két évfolyamon matematikából a kötelező óraszám 3, illetve 4. Speciális anyagot is választva ehhez még 2-2 óra adódik.

Matematikából írásbeli vizsga van az érettségin. A jelöltnek két gyakorlat és egy probléma megoldását kell kidolgoznia három óra alatt. A 2. gyakorlat kétféle, aszerint, hogy a diák a speciális anyagot tanulta-e vagy nem.

Tanulságos lehet megfigyelni, hogy mindegyik gyakorlat egy gyakorlatias szituációra alapozódik, és ehhez tesz fel számos, részben független, részben egymáshoz kapcsolódó kérdést. A helyzet leírása, a kérdések megfogalmazás igen gondos. A fogalmazás színvonala, az érvelés világossága is fontos szempontja a dolgozatok értékelésének. A gyakorlatok a tananyag ismeretében, kellő jártasság esetén megoldhatók. A problémák összetettebbek, de egyéni ötlet általában nem kell kidolgozásukhoz.

1. Gyakorlat (5 pont)
Közös minden jelölt számára

Az alábbi táblázat megmutatja, hogy 1965 és 1993 között évente a franciák hány százaléka utazott nyaralásra.

Év, x_i	1965	1975	1980	1985	1990	1992	1993
Százalékos arány, t_i	41	52,5	57,2	57,5	59,1	60	60,9

Forrás: A francia gazdaság táblázatai, 1994–1995.

Megjegyzés: Ebben a gyakorlatban semmilyen, zsebszámológépen nem megvalósítható speciális statisztikai számítást nem kérünk.

1. *a)* Ábrázolja az (x_i, t_i) statisztikai sorozatnak megfelelő pontokat olyan derékszögű koordinátarendszerben, melynek

– abszcisszatengelye kezdőpontjába az 1965-öt helyezzük, és 0,5 *cm*-t választunk egységül,

– ordinátatengelyének kezdőpontjába pedig 40-et helyezünk, és ezen 1 *cm*-t választunk egységül.

b) Számítsa ki ezen kettős sorozathoz tartozó G középértékpont koordinátáit, és helyezze el ezt a pontot az előbbi koordinátarendszerben.

2. *a)* Számítsa ki az x és t közti lineáris korreláció együtthatóját! A változók kapcsolata egyenes arányosság-e?

b) Határozza meg a t és x közti D regressziós egyenes egyenletét a legkisebb négyzetek módszerével! Az együtthatók közelítő értékeit két tizedes jegyre adja meg!

c) Húzza be a D egyenest az 1. kérdésben szereplő koordinátarendszerbe!

3. Feltételezve, hogy a növekedés a következő években ugyanilyen módon folytatódik, adjon egy becslést arra, hogy a franciák hány százaléka fog nyaralásra utazni 2000-ben!

2. Gyakorlat (5 pont)
A speciális anyagot nem tanuló jelöltek részére

Egy autógyárban három gyártósor, az *a*, a *b* és a *c* állítja elő a motorokat, mégpedig sorrendben a motorok 25, 35 és 40 %-át.

A motorok egy része selejtnek minősül az alábbi arányok szerint:

az *a* soron	5%
a *b* soron	4%
a *c* soron	1%

Találomra válasszunk egy motort, és értelmezzük az alábbi eseményeket:

A) a motor az *a* gyártósorról származik

B) a motor a *b* gyártósorról származik

C) a motor a *c* gyártósorról származik

D) a motor selejtes

A továbbiakban $p(E)$-vel jelöljük egy E esemény valószínűségét, és $p(E|F)$ jelöli E valószínűségét, tudva, hogy F megvalósult.

A számítási eredményeket 10^{-4} pontossággal kérjük megadni.

1. Fordítsa le a felsorolt adatokat a valószínűségszámítás nyelvére!

2. Mutassa meg, hogy $p(D) = 0{,}0305$.

3. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy motor az *a* gyártósorról származik, ha tudjuk, hogy a motor selejt?

4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy egy motor a *c* sorról származik, ha tudjuk, hogy nem selejt!

2 Gyakorlat (5 pont)
A speciális anyagot is tanuló jelöltek számára

Egy hotel igazgatója ki akarja cserélni intézménye fürdőszobai fehérneműjét.

Összesen 90 fürdőlepedőre, 240 törülközőre és 240 fürdőkesztyűre van szüksége.

Egy kereskedőcég ajánlja neki *A*-val jelölt készletét. Egy *A* készletben 2 fürdőlepedő, 4 törülköző és 8 fürdőkesztyű van. Egy *A* készlet ára 200 Fr.

Egy másik cég 400 Fr árban kínálja *B*-vel jelölt készletét, mely 3 fürdőlepedőt, 12 törülközőt és 6 fürdőkesztyűt tartalmaz.

Az igazgató x db *A* és y db *B* készletet vásárol, hogy fedezze a hotel szükségleteit.

1. Fogalmazza át egy egyenlőtlenségrendszer formájába az x-re és y-ra kiszabott feltételeket!

2. Tekintsünk egy

$$\left(0; \vec{i}; \vec{j}\right)$$

derékszögű koordinátarendszerrel ellátott P síkot. Minden $(x;y)$ rendezett párosnak megfeleltetjük a P sík x és y koordinátákkal rendelkező M pontját, megállapodva, hogy mindegyik tengelyen 2 *cm* jelent 5 készletet, azaz 4 *mm* felel meg egy készletnek. Rajzolja be a P síkra azon $M(x;y)$ pontok G halmazát, melyek kielégítik az alábbi egyenlőtlenségrendszert:

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad és \quad y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

Vonalkázza be a követelményeket nem teljesítő pontok által alkotott részét a síknak!

3. *a)* Fejezze ki az x db A készlet és y db B készlet vásárlása esetén fellépő kiadást x és y függvényében.

b) Megvalósíthatók-e a szükséges vásárlások 5000 Fr összeggel? Indokolja a választ!

4. Határozza meg grafikusan a megvásárolandó A és B készletek számát úgy, hogy minimális kiadás mellett teljesítsük a követelményeket. Indokolja a választott eljárást! Mennyi a minimális kiadás?

Probléma (10 pont)

A probléma A részében egy függvény vizsgálata, B részében egy integrál kiszámítása szerepel.

A rész

Legyen f függvény az R halmazon az alábbiak szerint értelmezve:

$$f(x) = (2x^2 + 3x - 3)e^{-x}.$$

A függvény grafikonját az

$$\left(0; \vec{i}; \vec{j}\right)$$

derékszögű koordinátarendszerben C-vel jelöljük. Az abszcisszatengelyen 2 cm, az ordinátatengelyen 1 cm legyen az egység.

1. *a)* Mi az f függvény határértéke mínusz végtelenben?

b) Határozza meg f határértékét plusz végtelenben! Emlékeztetünk rá, hogy minden α pozitív valós számra:

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} \cdot e^{-x} = 0.$$

Hogyan mutatkozik meg a kapott eredmény a függvény grafikonján?

2. Határozza meg $f'(x)$-et, ahol f' az f deriváltfüggvényét jelöli. Vizsgálja meg f' előjelét, és készítse el f növekedési viszonyainak táblázatát!

3. Másolja le és egészítse ki az alábbi értéktáblázatot. (Az $f(x)$ közelítő értékeit 10^{-1} pontossággal adja meg!)

x	-2,3	-2,2	-2,1	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	2	4	6
$f(x)$	6,8		-3,9		-13,4		-6,6		0,7			0,1

4. Oldja meg az $f(x) = 0$ egyenletet! Mit jelent az eredmény a függvény grafikonjára vonatkozólag?

5. Húzza meg a C görbének a –2,3 és a 6 abszcisszájú pontok közé eső részét!

B rész

Legyen F az R halmazon az alábbiak szerint értelmezett függvény:

$$F(x) = (-2x^2 - 7x - 4)e^{-x}.$$

1. Igazolja, hogy F egy primitív függvénye f-nek a teljes R halmazon!

2. Számítsa ki az alábbi integrál értékét:

$$\int_{-1}^{0} \left[-f(x)\right] dx.$$

Mi a geometriai jelentése a kapott eredménynek?

Versenynaptár az 1998/99-es tanévre

	FORDULÓK		
Név, osztályok	***Iskolai***	***Megyei/fővárosi***	***Országos***
Varga Tamás Verseny 7. és 8. évfolyam	1998. nov. 12. 14–16 óra	1999. jan. 14. 14–16 óra	1999. ápr. 15. 14–16 óra
Arany Dániel Verseny kezdők 9. évf.	1999. febr. 11. 14–18 óra	–	1999. ápr. 15. 11–15 óra
Arany Dániel Verseny haladók I–II. 10. évf.	1998. dec. 3. 14–18 óra	1999. febr. 11. 14–18 óra	1999. ápr. 15. 11–15 óra
Arany Dániel Verseny haladók III. 10. évf.	1999. febr. 11. 14–18 óra	–	1999. ápr. 15. 11–15 óra
OKTV I. szakközépiskolák 11–12. évf.	1998. nov. 5. 14–19 óra	1999. jan. 7. 10–15 óra	1999. márc. 4. 10–15 óra
OKTV II. gimnáziumok 11–12. évf.	1998. nov. 5. 14–19 óra	1999. jan. 7. 10–15 óra	1999. márc. 4. 10–15 óra
OKTV III. spec. mat. 11–12. évf.	1998. dec. 10. 14–19 óra	–	1999. márc. 4. 10–15 óra

A versenyek felől érdeklődni lehet a következő telefonszámon: **311-66-50** vagy **311-86-75**

HÍREK VERSENYEKRŐL

Matematika verseny 8. osztályosoknak, Berzsenyi Dániel Gimnázium, Budapest, 1997. november.

1. Egy nagy papírra egymás után leírjuk 1-től kezdve a pozitív egész számokat. Egy perc alatt 80 számjegyet tudunk leírni. Mennyi ideig tart, amíg az 1997-et is leírjuk?

2. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amely osztható 4-gyel, 5-tel és 6-tal is?

3. Az O középpontú 4 egység sugarú kör egyik pontja D. Az OD sugarat a $DA = 4$ egység hosszúságú szakasszal meghosszabbítjuk. Az A pontból érintőket húzunk a körhöz, az érintési pontok B és C. Mekkora az ABC háromszög köré írható kör sugara?

4. Egy turista A-ból B-be ment, összesen 11,5 km-t tett meg. Az út először emelkedőn vezetett, majd vízszintes volt a terep, ezután egy lejtő következett. Összesen 2 óra 54 percig tartott az útja. B-ből A-ba visszafelé ugyanez az út 3 óra 6 percig tartott. A turista emelkedőn óránként 3 km-t, vízszintes terepen 4 km-t, lejtőn 5 km-t tett meg. Milyen hosszú az A és B közötti úton a vízszintes terep?

5. Van egy 7, 9 és 11 dm oldalélű téglatest alakú ládánk és 77 egyforma négyzetes oszlop alakú kerámia téglánk, amelyeknek oldalélei 3, 3 és 1 dm. Be tudjuk-e rakni az összes téglát a ládába anélkül, hogy egyet is eltörnénk?

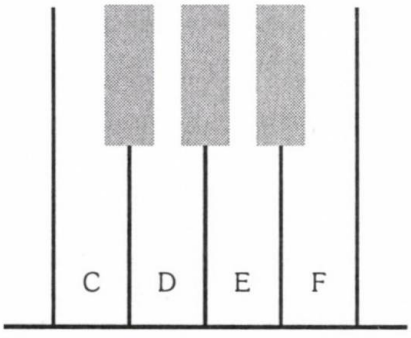
Bátaszéki Matematika Verseny

A versenyt ez év márciusában már 9. alkalommal rendezte meg a Bátaszéki Általános iskola és a Tolna Megyei Tehetséggondozó Alapítvány, **Károlyi Károly** matematikatanár, szaktanácsadó irányításával. A verseny döntőjén a felső tagozatosoknak a következő feladatokat tűzték ki:

5. osztály

1. Játék a számokkal: A játékot ketten játszhatják, felváltva mondanak számokat úgy, hogy a társ által mondott számhoz legkevesebb 1-et, de legtöbbet 5-öt lehet hozzáadni. Az veszít, aki kényszerül kimondani az 50-et. Ha te lennél az egyik játékos, hogyan tudnál nyerni?

2. Zongoraórán a gyerekek azt a feladatot kapják, hogy négy egymás melletti fehér és három fekete billentyű közül üssenek le egyszerre kettőt, ahányféleképpen csak tudnak. Egy másik alkalommal három billentyűt kellett egyszerre leütni. Melyik alkalommal volt több lehetőségük, hogy csak fehér billentyűkkel teljesítsék a feladatot?



3. Melyik az a legnagyobb természetes szám, amelyet oda-vissza olvasva ugyanannyit ér? Tudjuk még róla, hogy számjegyeinek összege 30, és benne legfeljebb háromszor fordulhat elő ugyanaz a számjegy.

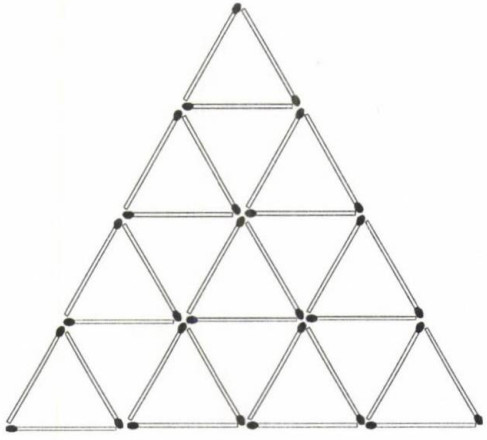
4. Péter és Pál egyszerre indultak el Nekeresdről Kukutyinba. Egyikük lovagolt, a másikuk szamárháton ügetett. Induláskor megbeszélték, hogy pontosan délben mindketten megpihennek, és felhívják egymást mobiltelefonon, hogy megbeszéljék, mekkora út áll még előttük.

Péter így fogalmazott: „Ha háromszor annyit tettem volna meg, mint amennyit megtettem, feleakkora út volna még előttem, mint amennyi van."

Pál azt mondta: „Ha csak feleannyit tettem volna meg, mint amennyit megtettem, még háromszor akkora út volna előttem, mint amennyi van."

Melyiküknek van igaza? (A ló nyilvánvalóan gyorsabb a szamárnál!)

5. 30 db gyufaszálból raktuk össze az itt látható ábrát. Vegyél el 9 db gyufaszálat úgy, hogy pontosan 9 db háromszög legyen látható!



6. osztály

1. Egy szabályos hatszög csúcsai közül hagyjunk el kettőt! Milyen négyszögek keletkeztek? Határozzuk meg ezen négyszögek szögeit.

2. Tekintsük a következő számsorozatot: 1; 1; 2; 3; 7; 22; ... A sorozatban a harmadiktól kezdve minden elem 1-gyel nagyobb, mint az előző kettő szorzata. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat egyetlen tagja sem osztható 4-gyel!

3. X-né dicsekszik a munkatársainak:

„Mind a két fiamnak ma van a születésnapja. Egyik sincs még 10 éves. Találjátok ki, menynyi idősek. Anna, neked megsúgom az életkoruk szorzatát." (Megsúgja.)

Anna: „Ebből még nem lehet meghatározni."

„Akkor Borinak az életkoruk hányadosát súgom meg." (Megsúgja.)

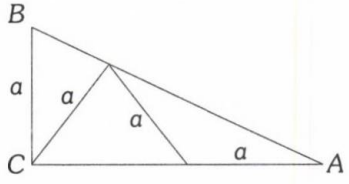
Bori: „Még most sem egyértelmű"

„Igazatok van. Borinak a korkülönbséget kellett volna megmondanom, akkor kitalálhatta volna."

Hány évesek X-né fiai?

4. Gondoltam négy számot. Ezután kiválasztottam közülük az összes lehetséges módon hármat-hármat. Kiszámítottam a kiválasztott számok számtani közepét, majd ehhez hozzáadtam a negyedik számot. Így a következő négy számot kaptam: 18; 22; 26; 30. Melyik volt az a négy szám, amire gondoltam?

5. Egy derékszögű háromszöget az ábrán látható módon három egyenlő szárú háromszögre bontottunk. Hány fokosak az egyenlő szárú háromszögek belső szögei?



7. osztály

1. Tanévkezdéskor Andrásnak 50%-kal volt több bélyege, mint Bélának. Az elmúlt időszakban András 100 bélyeggel, Béla 120 bélyeggel gyarapította a gyűjteményt. Így bélyegeik számának aránya 3 : 4 lett. Hány darab bélyege volt eredetileg Andrásnak és Bélának?

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek a fele négyzetszám, a harmada pedig köbszám?

3. Egy négyzet belsejében felveszünk 10 pontot úgy, hogy semelyik három ne essék egy egyenesbe. A felvett pontokat egymással és a négyzet csúcsaival is összekötjük úgy, hogy az összekötő szakaszok csak a felvett pontokban vagy a négyzet csúcsaiban messék egymást.

a) Hány háromszögre bontják a négyzetet az így meghúzott szakaszok?

b) Hány háromszöget kapunk, ha eredetileg 40 pontot veszünk fel a négyzetben?

c) Hány pontot kellene felvenni a négyzetben, hogy 1998 háromszöget kapjunk?

4. Adott ABC derékszögű háromszög. Vegyük fel az AB átfogón az M pontot úgy, hogy

$BM = BC$ legyen, továbbá legyen N az AC befogón az a pont, amelyre $CN = CH$, ahol H a C-ből húzott magasságvonal talppontja. Mutassuk meg, hogy ekkor MN merőleges AC-re!

5. Egy szabályos háromszög csúcsainak kiszínezéséhez öt szín áll rendelkezésre. Hányféleképpen színezhetünk, ha minden csúcsot kiszínezünk, és a tükrözéssel vagy elforgatással egymásba vihető színeket nem tekintjük különbözőnek?

8. osztály

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2$$

2. Két kerékpáros az A városból egyszerre indul el a B város felé. Amikor a gyorsabb B városba ér, azonnal visszafordul, és B várostól 10 km-re találkozik a lassabban haladóval. Ezután mindkettő folytatja útját. Amikor a lassabb B városba ér, szintén azonnal visszafordul. A gyorsabb, miután visszaért A városba, újra azonnal visszafordul, és az AB távolság egyharmadának megtétele után újra találkoznak. Mindkét kerékpáros sebessége állandó. Mekkora a távolság az A és B városok közt?

3. Egy háromszögben $A_{szög} = 45°$, $B_{szög} = 75°$. Az A-ból induló magasságvonal BC-t D-ben, a C-ből induló magasságvonal AB-t F-ben metszi. F-nek az AC oldalra való merőleges vetülete G. Bizonyítsuk be, hogy $AG = GD$.

4. Az $ABCD$ téglalap AB oldalának felezőpontja F_1, az AD oldalé F_2. Milyen arányban osztják egymást a DF_1 és CF_2 szakaszok?

5. Egy öt házaspárból álló társaságot két csoportra kell osztanunk, az első csoportba hat személynek kell kerülnie, a hat személy közül legalább két házaspár. Hányféleképpen lehet elvégezni a felbontást?

Hegyi Lajos Emlékverseny
Szováta, 1997. december 15.

Hegyi Lajos a marosvásárhelyi Bolyai Farkas líceum kiemelkedő diákja, matematika versenyek rendszeres résztvevője és díjazottja volt az 1980-as évek első felében. 1988-ban szerzett matematikusi diplomát a kolozsvári egyetemen. 1989. december 21-én Marosvásárhely főterén halt hősi halált öt társával együtt.

Emlékére, **Dáné Károly** marosvásárhelyi matematikatanár kezdeményezésére a szovátai Teleki Oktatási Központban rendezték meg azt a matematika versenyt, amelyen 55 középiskolás tanuló vett részt Erdély különböző városaiból. A versenyen a következő feladatokat tűzték ki:

IX. osztály

1. $Z \times Z$ halmazon határozzuk meg a következő egyenlet összes megoldását:

$$3x^2 + 5xy + 2y^2 - x - y = 0$$

(Koppánymonostory Kovács Lajos)

2. *a)* Ha $a + b = \frac{\pi}{2}$ és $a, b \geq 0$, igazoljuk, hogy

$$\sin a + \sin b \geq 1$$

b) Ha $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ és $a, b, c \geq 0$, igazoljuk, hogy

$$\sin a + \cos b + \cos c \geq 1$$

3. Az ABC hegyesszögű háromszög síkjában felvesszük a D és E pontokat úgy, hogy $CD \perp CA$ és $CD = CB$, valamint $CE \perp CB$ és $CE = CA$ (A és E, illetve B és D a BC, illetve AC-re nézve ellentétes félsíkban vannak). Legyen F és C' a (DE) és (AB) szakaszok felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy:

a) $DF = CC'$

b) AE merőleges BD-re

(Olosz Ferenc)

4. Adott egy 5×5-ös négyzetháló. Bejelöljük minden sorból és minden oszlopból 2-2 négyzet középpontját (összesen 10 pontot). Kössük össze a lehető legtöbb pontot egymással az oldalakkal párhuzamos szakaszok segítségével úgy, hogy a lehető legkevesebbszer emeljük fel a ceruzát a papírról (a papírnak csak az egyik oldalára írhatunk). Legalább hányszor kell felemeljük a ceruzát a papírról?

(Bege Antal)

X. osztály

1. Ha $[x]$ az x egészrészét jelöli, igazoljuk, hogy

$$[x]+[x+a]=\left[\frac{x}{a}\right] \quad \forall x \in R$$

akkor és csak akkor, ha

$$a=\frac{1}{2}.$$

(András Szilárd)

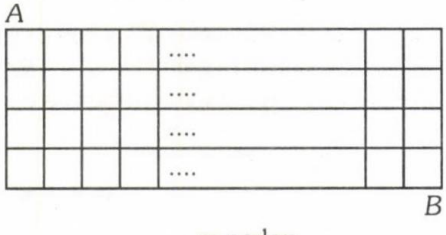
2. Adott az ABC általános háromszög és AA', BB', CC' három, az $M \in Int\,(ABC)$ pontban összefutó egyenes (A', B', C' a BC, CA illetve AB oldalakon vannak). Ha $AM = BM = CM$ és $MA' \cdot MB' \cdot MC' = 1$, igazoljuk, hogy $AM \geq 2$.

(Dáné Károly)

3. Az $ABC\Delta$ oldalaira a háromszögön kívül megszerkesztjük az ABM és ACQ, B-ben illetve C-ben derékszögű, egyenlő szárú háromszögeket, valamint a $BCPN$ négyzetet. D-vel és E-vel jelölve az (MN) ill. (PQ) felezőpontjait igazoljuk, hogy $DAE\Delta$ pontosan akkor egyenlő szárú és derékszögű A-ban, ha $ABC\Delta$ is az.

(András Szilárd)

4. Két matematikus hangya rámászott egy $4 \times m$-es négyzethálóra. Egyszerre indultak el az A és B pontokból, és egyszerre lépnek. Egy lépés azt jelenti, hogy a vonalak mentén összesen 3 egységnyit haladnak. Találkozhat-e a két hangya? Ha igen, hol?



m oszlop

(Bege Antal és András Szilárd)

XI. osztály

1. Melyek azok a valós számok, amelyekre

$$2^{2^x-1}+2^{2^{-x}+1}=2^{-x}-2^x+2\,?$$

(Kacsó Ferenc)

2. Legyen $S = \{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}\}$ egy $n-1$ darab ($n \geq 3$) transzpozíciót tartalmazó halmaz,

$$t_k \in S_{2n}, k = \overline{1, n-1}.$$

Igazoljuk, hogy létezik olyan $\varphi \in S_{2n}$ permutáció, hogy

$$\varphi \cdot t_k = t_k \cdot \varphi, \forall k = \overline{1, n-1}$$

és φ nem identikus.

Igaz-e az állítás, ha S n darab transzpozíciót tartalmaz?

(András Szilárd)

3. Legyen

$$a_1 = a \in R \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \text{ és } a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2a_n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bizonyítsuk be, hogy bármely adott a esetén ez az összefüggés egy $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozatot értelmez, mely a-tól függetlenül konvergens, és számítsuk ki a határértékét!

(Kacsó Ferenc)

4. Nevezzük az x természetes számot T_n tulajdonságúnak, ha x felírható n számú természetes szám négyzetének összegeként. Bizonyítsuk be:

a) ha x T_2 tulajdonságú, akkor $2x$ is az;

b) ha x, y T_2 tulajdonságú, akkor $x \cdot y$ szintén T_2 tulajdonságú.

c) ha x, y T_4 tulajdonságú, akkor $x \cdot y$ szintén T_4 tulajdonságú.

XII. osztály

1. Legyen

$$M = \left\{ A \in M_3(R) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Milyen algebrai struktúra M a mátrixok szorzásával?

b) Igazoljuk, hogy M bármely eleme vagy invertálható, vagy valamely pozitív egész kitevőjű hatványa O_3.

2. Határozzuk meg az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\} \cdot \sin \pi x$ függvény összes primitív függvényeit, ahol $\{x\}$ az x törtrésze.

(András Szilárd)

3. Legyen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely teljesíti az

$$f \circ f = 1_{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad f \neq 1_{\mathbb{R}}$$

feltételeket.

a) Adjunk példát ilyen függvényre.

b) Ha az f függvény kielégíti a megadott feltételeket és primitiválható, igazoljuk, hogy szigorúan csökkenő.

(Dáné Károly)

4. Egy gépírónő a munkanap folyamán n darab levelet kell legépeljen. A levelek megszámozott kéziratát a főnöke a nap folyamán egyenként helyezi egymásra a gépírónő asztalára, a számozás növekvő sorrendjében. A gépírónő mindig a legfelső levelet veszi le és gépeli. Az $(n-1)$-es számú levél végeztével hány különböző gépelési sorrend lehet még hátra? (Az is egy lehetőség, hogy nincs már több gépelnivaló. A nap végére minden levelet le kell gépelni.)

A tanárképző főiskolások 1998. évi Péter Rózsa matematikai versenye Eger

A versenyen a következő feladatokat tűzték ki:

1. Bizonyítsuk be, hogy az „Egy kocka feldarabolható n számú kockára, ahol $n \geq 0$ egész" állítás csak véges sok n-re hamis. (Egy K kocka n számú kockára való feldarabolásán azt értjük, hogy az n számú kockából hézagmentesen összerakható K.)

2. Igazoljuk, hogy a t területű $ABCD$ konvex négyszögre és a belsejében lévő P pontra pontosan akkor áll fenn a

$$2t = PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

egyenlőség, ha a négyszög négyzet, és P a négyzet középpontja!

3. Állítsuk elő az n természetes számot a következő formában:

$$n = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \ldots + a_k \cdot 2^k,$$

ahol az a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ együtthatók értéke 0, 1 vagy 2 lehet, és $a_k \neq 0$. Jelölje $b(n)$ az n összes ilyen előállításainak számát. Határozza meg $b(1998)$-at!

4. Egy téglatest egyik csúcsából induló testátlója az ugyanezen csúcsból induló lapátlókkal rendre az α, β, γ szögeket zárja be. Bizonyítsuk be, hogy érvényes a

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

egyenlőtlenség!

5. Adjuk meg az összes olyan legalább első fokú, valós számtest feletti polinomot, amelynek minden együtthatója 1 vagy –1, és minden gyöke valós!

6. Legyen $x \geq 1$ rögzített valós szám, és értelmezzük az (a_n) sorozatot a következőképpen:

$$a_0 = x$$

$$a_{n+1} = x^{a_n}, \text{ ahol } n \geq 0.$$

Mely x értékek esetén konvergens az (a_n) sorozat, és mi a határértéke?

Vizsgáljuk meg külön is az $x = \sqrt{2}$ és $x = \sqrt[3]{3}$ eseteket!

7. Legyen $(\underline{v}_n)$ egész koordinátájú, 2 dimenziós vektoroknak egy olyan sorozata, amelyre minden n esetén teljesül, hogy:

$\underline{v}_{n+1} - \underline{v}_n = (0;1)$, vagy $\underline{v}_{n+1} - \underline{v}_n = (1;0)$. Igazoljuk, hogy a sorozat tartalmaz 4 tagú számtani sorozatot (azaz vannak olyan $\underline{a}$ és $\underline{d}$ egész koordinátájú vektorok, hogy $\underline{a}$, $\underline{a} + \underline{d}$, $\underline{a} + 2\underline{d}$, $\underline{a} + 3\underline{d}$ szerepeljenek a sorozat elemei között)!

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 1998. nov 30.**

105. Legyen n pozitív egész szám! Létezik-e $2n+1$ darab egymást követő $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ természetes szám úgy, hogy

$a)\ a_0 + a_1 + \ldots + a_n = a_{n+1} + \ldots + a_{2n}$;

$b)\ a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_n^2 = a_{n+1}^2 + \ldots + a_{2n}^2$

teljesüljön? (Két kérdés!)

„Concours général" verseny, Franciaország

106. Határozzuk meg az összes olyan függvényt, amelyre

$$f(axf(x)+f(y)) = af^2(x)+y$$

teljesül bármely valós x, y, és 1-től különböző pozitív valós a szám esetén!

Bencze Mihály, Brassó

107. Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)$$ határértéket!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

108. Tekintsünk $\frac{n(n+1)}{2}$ darab különböző valós számot, és véletlenszerűen rendezzük el őket egy számháromszögbe úgy, hogy a háromszög k-adik sorába pontosan k darab szám kerüljön ($k = 1, 2, \ldots, n$). Jelölje a k-adik sorban álló számok közül a legnagyobbat M_k. Mi a valószínűsége annak, hogy $M_1 < M_2 < \ldots < M_n$?

109. Egy papírlapra fel van írva az első 100 pozitív egész szám növekvő sorrendben úgy, hogy bármely két szomszédos szám között van hely egy műveleti jel számára. Anna és Balázs felváltva (Anna kezd) beírnak a kimaradt helyek valamelyikére egy, a „+", „–", „×" jelek közül általuk választott műveleti jelet. A 99. lépés után a műveletek elvégzésével kapott számot jelölje S. Igaz-e, hogy Anna rögzíteni tudja S paritását, ha jól játszik?

Feladatmegoldások (82.; 90-94. feladatok)

82. Az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 2\cdot ABC\sphericalangle$ és $BCA\sphericalangle > 90°$. Tudjuk még, hogy a háromszög oldalai egész szám hosszúak. Határozzuk meg a legkisebb kerületű ilyen háromszöget!

Szőkefalvi-Nagy Gyula Mat. Emlékverseny 1995-96.

Megoldás: Ha $\alpha = ABC\sphericalangle$, akkor a feltétel alapján $\alpha = 30°$. Jelölje a, b, c a háromszög megfelelő oldalainak hosszát. A szinusztétel értelmében

$$\frac{a}{\sin 2\alpha} = \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin 3\alpha},$$

ahonnan a megfelelő addíciós összefüggések alkalmazásával adódik, hogy $a = 2b\cos\alpha$ és $c = b(4\cos^2\alpha - 1)$, azaz $a^2 - b^2 = bc$.

Legyenek p és q olyan relatív prím pozitív egészek, amelyekre

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c}{a+b} = \frac{p}{q}$$

Mivel a, b és c pozitív egészek, ezért az előző összefüggésből adódik, hogy $b = qt$, $a = (p + q)t$, $c = pz$ és $a + b = qz$, ahol t és z pozitív egészek. Összevetve a kapott összefüggéseket, kapjuk, hogy $a + b = (p + 2q)t = qz$, ahonnan a p-re és q-ra tett feltevésünk alapján $t = mq$ és $z = m(p + 2q)$, ahol m pozitív egész szám. Összefoglalva: $a = mq(p + q)$, $b = mq^2$, $c = mp(p + 2q)$, ahol m, p, q pozitív egészek és $(p; q)=1$. A minimális kerületű megfelelő háromszöget keressük, ezért $m=1$.

Mivel $\alpha < 30°$, ezért

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\alpha < 1,$$

amiből a

$$\cos\alpha = \frac{a}{2b}$$

felhasználásával adódik, hogy

$$\left(\sqrt{3}-1\right)q < p < q.$$

Az adott feltételek mellett a háromszög kerülete akkor lesz a legkisebb, ha a $q - p$ különbség minimális. Legyen ezért $q = p + 1$. Ekkor

$$\left(\sqrt{3}-1\right)(p+1) < p < p+1.$$

Ez alapján, a korábbi feltételeket is figyelembe véve a kerület $p = 3$, $q = 4$ esetén lesz minimális. Ebben az esetben $a = 28$, $b = 16$, $c = 33$ és $K = 77$.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 7.

90. Oldjuk meg az

$$x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997 = 0$$

egyenletet a valós számok halmazán!

Tóth Sándor, Sárospatak

Megoldás: Az egyenlet bal oldalán álló polinom $x^4 + 999x^2 + 998(x + 1)^2 + 999$ alakba írható, ahonnan látszik, hogy nincs megoldás.

A megoldók száma: 10.

91. Legyen m pozitív valós szám. Igazoljuk, hogy bármely $x, y \in [0; m]$ esetén

$$\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + m^2\right)^2 \leq \left(x^2+m\right)\left(y^2+m\right) \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2} + m^2\right)^2 !$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: A kitűzött formájában egyik egyenlőtlenség sem igaz, ennek belátásához elegendő megvizsgálni pl. az $x = y = m = 2$ és az $x = y = m = 1/2$ eseteket. (Sajnos a feladat valóban hibásan jelent meg – *a rovatvezető)*

Az egyenlőtlenség javított alakja a következő:

$$\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + m^2\right)^2 \leq \left(x^2+m^2\right)\left(y^2+m^2\right) \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2} + m^2\right)^2 !$$

bármely $x, y \in [0; m]$ esetén.

Az első egyenlőtlenség ekvivalens átalakítások után a következő alakra hozható:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 - 2m^2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq x^2y^2 - 2m^2xy. \quad (1)$$

Az $f: [0; m^2] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2 - 2m^2t$ szigorúan csökkenő. Mivel $x, y \in [0; m]$ esetén

$$0 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq m^2, 0 \leq xy \leq m^2$$

és

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy,$$

ezért

$$f\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right) \geq f(xy),$$

ami éppen a bizonyítandó (1) egyenlőtlenség.

A második rész a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján azonnal adódik.

Egyenlőség mindkét egyenlőtlenségnél az $x=y$ esetben áll fenn.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 6.

92. Legyenek p, q és r olyan pozitív valós számok, hogy az ABC háromszög oldalaira teljesüljenek a következő egyenlőtlenségek:

(1) $q \leq BC$; (2) $r \leq AC \leq p + r$;
(3) $r \leq AB \leq p + q$; (4) $2p \leq q$;
(5) $2p \leq r$; (6) $r \leq \frac{4}{3}q$.

Határozzuk meg a háromszög A csúcsánál levő belső szög legkisebb lehetséges értékét!

Mathematics Magazine, USA

Megoldás: Legyen $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Feltehetjük, hogy $p=1$. Ekkor az (1)–(6) egyenlőtlenségek alapján

$$2 \leq q \leq a,$$
$$2 \leq q \leq c \leq q+1,$$
$$2 \leq r \leq b \leq r+1 \leq \frac{4}{3}q+1.$$

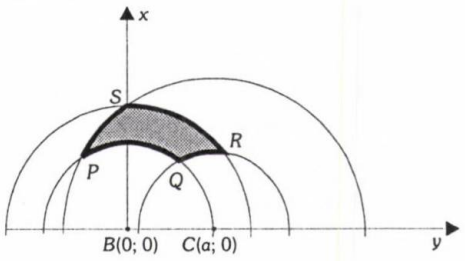
Adott b és c esetén a tekintett szög akkor a legkisebb, ha $a=q$. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy $B(0; 0)$, $C(a; 0)$ legyen, és az $A(x; y)$ csúcs a felső félsíkba essen. Ekkor az A csúcs lehetséges helyzetei az

$$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq (a+1)^2$$

és a

$$4 \leq (x-a)^2 + y^2 \leq \left(\frac{4}{3}a+1\right)^2$$

($y > 0$) fél-körgyűrűk metszetében találhatók *(1. ábra)*.



1. ábra

Ha a BC oldallal szemközti szög adott, akkor a megfelelő A csúcsok a BC szakasz fölötti látókörívén helyezkednek el. Mivel a körgyűrűk metszeteként előálló tartomány egyik határoló íve sem érinti ezen látókörív sereg egyikét sem, ezért a minimális szöghöz tartozó A csúcs a tekintett tartomány valamelyik „csúcsában" lesz.

A csúcspontok legyenek az 1. ábrának megfelelően P, Q, R, S. Ha $A = P$, akkor

$$b = \frac{4}{3}a+1, \quad c = a;$$

ha $A = Q$, akkor $b = 2$, $c = a$;
ha $A = R$, akkor $b = 2$, $c = a + 1$;
ha $A = S$, akkor

$$b = \frac{4}{3}a+1, \quad c = a+1.$$

Ha a megfelelő A csúcshoz tartozó szögeket rendre α_P α_Q, α_R és α_S jelöli, akkor a koszinusztétel alapján:

$$\cos\alpha_P = \frac{2}{3} + \frac{1}{2a};\ \cos\alpha_Q = \frac{1}{a};$$

$$\cos\alpha_R = \frac{1}{2} + \frac{3}{4(a+1)};\ \cos\alpha_S = \frac{8a^2+21a+9}{12a^2+21a+9}$$

Látható, hogy $a \geqq 2$ esetén mindegyik kifejezés pozitív, és a-nak csökkenő függvénye, ezért a minimális szög abból a kifejezésből adódik, amelynek az $a=2$ helyen vett értéke maximális. Ez $A=P$ esetén teljesül, ekkor

$$\cos\alpha_P = \frac{11}{12},\ \alpha_P \approx 23.56°.$$

A megoldók száma: 2.

93. Melyek azok az 1-től különböző pozitív r racionális számok, amelyekre racionális az $r^{1/(r-1)}$ is?

Mathematics Magazine, USA

Megoldás: Legyen

$$r = \frac{p}{q},$$

ahol p és q különböző relatív prím pozitív egészek. Ekkor

$$r^{1/(r-1)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{q/(p-q)}$$

Legyen $p - q = s$ ($s \neq 0$ és $(s; q) = 1$). Ezen jelölések bevezetése után azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy

$$\left(\frac{q+s}{q,}\right)^{q/s}$$

mikor racionális.

Mivel $(q; s)=1$, ezért

$$\left(\frac{q+s}{q,}\right)^{1/s}$$

is racionális kell, hogy legyen. Viszont, mivel $q + s$ és q is relatív prímek, ezért ez csak úgy lehetséges, ha vannak olyan különböző x és y pozitív egészek, amelyekre

$$q+s = x^{|s|} \quad \text{és} \quad q = y^{|s|}.$$

Ha >1, akkor

$$|s| = \left|x^{|s|} - y^{|s|}\right| = |x-y| \cdot \left|x^{|s|-1} + x^{|s|-2}y + \ldots y^{|s|-1}\right|.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha $|x-y| = 1$ és $x = y = 1$, ami nem lehet. Kaptuk tehát, hogy $|s| = 1$, azaz $p = q + 1$ vagy $p = q - 1$. Könnyen látható, hogy ekkor a tekintett kifejezés valóban racionális számot állít elő. A feladat feltételeit tehát pontosan azok az r pozitív racionális számok elégítik ki, amelyek tovább nem egyszerűsíthető alakjában a számláló és a nevező különbsége 1.

Dályay Pál Péter, Szeged
Nagy Erzsébet, Debrecen

A megoldók száma: 5.

94. Igaz-e, hogy megadható megszámlálhatóan végtelen sok síkidom úgy, hogy közülük egyik sem fedhető le a többivel?

Megoldás: A válasz: igaz. Tekintsük téglalapoknak egy olyan $\{\mathbf{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatát, amelyek szomszédos oldalaira nézve $a_n = 4^{n-1}$ és $b_n = 4^{1-n}$. Belátjuk, hogy ezen téglalapok egyike sem fedhető le a többivel.

Tekintsük $\mathbf{T}_n$-et. $\mathbf{T}_n$-ből a $\mathbf{T}_1$; $\mathbf{T}_2$; ...; $\mathbf{T}_{n-1}$ téglalapok által lefedhető rész területe kisebb, mint az utóbbiak átlóinak összege és szélessége közötti szorzat, azaz

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{4^2+4^{-2}}+\ldots+\sqrt{4^{2(n-2)}+4^{2(2-n)}}\right)\cdot 4^{1-n} \leqq$$

$$\leqq\left(\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\ldots 4^{n-2}\sqrt{2}\right)\cdot 4^{1-n}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{4^{n-1}-1}{4}\cdot 4^{1-n}<\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad (1)$$

$\mathbf{T}_n$-ből a $\mathbf{T}_{n+1}$; $\mathbf{T}_{n+2}$; ...; $\mathbf{T}_k$ téglalapokkal lefedhető rész területe kisebb, mint $\mathbf{T}_n$ átlója és a $\mathbf{T}_k$ ($k > n$) téglalapok szélessége közötti szorzatok összege, azaz

$$\sqrt{4^{2(n-1)}+4^{2(1-n)}}\cdot\left(4^{-n}+4^{-n-1}+\ldots\right)=$$

$$=\sqrt{4^{2(n-1)}+4^{2(1-n)}}\cdot\frac{4^{1-n}}{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+4^{4(1-n)}}}{3}\leqq\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad (2)$$

Kaptuk tehát, hogy $\mathbf{T}_n$-ből az összes téglalappal lefedhető rész területe az (1) és (2) egyenlőtlenségek alapján kisebb, mint 1 ($\mathbf{T}_n$ területe), vagyis $\mathbf{T}_n$ nem fedhető le a többivel.

Dályay Pál Péter, Szeged
Nagy Erzsébet, Debrecen

A megoldók száma: 4.

A megoldók névsora: Barta László, Benczúrfalva (82., 90., 91., 93., 94.); Bíró Bálint, Eger (90.); Csorba Ferenc, Győr (82., 90., 91.); Dályay Pál Péter, Szeged (82., 90. 2 mód, 91. 2 mód, 92-94.); László Sándor, Szombathely (82., 90. 2 mód); Nagy Erzsébet, Debrecen (82., 90., 91., 93., 94.); Schutzbach Mártonné, Siófok (90. 4 mód); Simon József, Csíkszereda (90., 91., 93., 94.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (82., 90. 2 mód, 91-93.); Ványa István, Szeged (82., 90.).

Kiegészítés Nemetz Tibor: A statisztika jelentősége napjainkban című cikkéhez

(A Matematika Tanítása, 1997. november 17–22. oldal)

A cikk irodalomjegyzéke, amire a szerző hivatkozott sajnálatos módon kimaradt, ezennel pótoljuk.

Nemetz Tibor publikációi e témában

Magyarul:

[N1] Egy lehetőség valószínűségszámítási fogalmak bevezető szemléltetésére. A Matematika Tanítása, XVII. (1970), 143–149.

[N2] Ismerkedés a véletlennel (Bognár Jánosnéval és Tusnády Gáborral), A Matematika Tanítása, 25 (1978), 1–6.

[N3] Ismerkedés a véletlennel. Tanítási tapasztalatok (Barabás Bélával), A Matematika Tanítása, 25(1978) No. 3, 68–73.

[N4] Ismerkedés a véletlennel. Középiskolai szakköri füzet. (Bognár Jánosnéval és Tusnády Gáborral), Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.

[N5] A véletlen elemi matematikája. Kísérleti tankönyv és tanári útmutató hozzá. ESzK. 1980.

[N6] Játék és valószínűség (Bognár Jánosnéval), A Matematika Tanítása, 27(1980), 76–85.

[N7] Matematika III., B fakultáció. Gimnáziumi Tankönyv (Hajnal Imre és Pintér Lajos társszerzőkkel), Budapest, 1981.

[N8] Matematika IV., B fakultáció. Gimnáziumi Tankönyv. Hajnal Imre, Pintér Lajos és Urbán János társszerzőkkel), Tankönyvkiadó, 1982.

[N9] Kézikönyv a Matematika B fakultáció tanításához, (Hajnal Imrével és Pintér Lajossal), Tankönyvkiadó, 1984.

[N10] Matematika IV. osztály. Szakközépiskolai Tankönyvkiegészítő. (Gyapjas Ferenccel), Tankönyvkiadó, 1982.

[N11] Valószínűségszámítás és Statisztika. Segédanyag az intenzív tanártovábbképzéshez, Műv. Min., 1985.

[N12] Valószínűségszámítás. Gimnáziumi tankönyv a speciális matematikai osztályok részére, Tankönyvkiadó, 1986.

[N13] A Springer rejtjeles levele, Matematikai Lapok, (1991) No. 3, 7–18.

[N14] Milyen matematikát rejt Verne postagalambja? Módszertani Lapok, Matematika, 3. (1996–97), No. 3.

Angolul:

[N15] On teaching of probability at secondary level (with K. Bognár), Educational Studies in Mathematics, 8(1977), 399–404.

[N16] The place of probability in the curriculum. Proceeding of ICME-4 held at Berkeley 1980. M. Zweng (ed.), Birkhauser Boston, 1983, 195–198.

[N17] Pre-University Stochastics Teaching in Hungary. In: Teaching Statistics in Schools throughout the World, V. Barnett, (ed.), Ch. 4., Voorburg, 1982, 85–112.

[N18] Teaching Statistics to 16–18 years olds: Dreams and Reality. Proc. of the first ICOTS, Sheffield, 1982.

[N19] Exercises to improve the subjective Approach to Probability (with N. Kusolitsch), Teaching of Statistics, 8(1986), 78–82.

[N20] Prospects of teaching probability and statistics, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 12. No 4(1989), 504–511.

[N21] Statistical decisions: Classroom experience. „Stochastik in der Schule". (Submitted for publication)

[N22] Statistics and Probability at the Secondary Level, ISI Newsletter, 20(1966), No. 3, 18–19.

[N23] An overview of the teaching of probability in secondary schools. In: Philipps, B. (ed.): Papers on Statistical Education presented at ICME-8, Seville, 1996., Swisburne Univ. of Technology, 1997.

További irodalom

Barnett, V. (1982): „Teaching Statistics in Schools throughout the World", ISI TOTSAS, Voorburg

Biehler (1991): „Explorative Datenanalyse", Der Mathematikunterricht, Jahrgang 37, Heft 6 (A collection of 4 papers).

Fischbein, E. (1990): „Training Teachers for Teaching Statistics" In: Hawkins, A. (ed.): Training Teachers to Teach Statistics, ISI, Voorburg, 1990, pp. 48–57.

Hawkins, A. (1989): The Annual United Kingdom Statistical Prize, in: Morris, M. (editor), The Teaching of Statistics, Studies in Mathematics Education, Volume 7, Unesco.

Knuth, D. E. (1981): A számítógépes programozás művészete, 2. kötet, (Szeminumerikus algoritmusok), Műszaki Kiadó, Bp., 1987.

Moore, D. (1990): Uncertainty. In: L. A. Steen (ed.): On the shoulder of Giants, National Academy Press, Washington, D. C., pp. 95–137.

Nuffield Mathematics Project (1969): „Propabability and Statistics", Newgate Press Limited, London.

Tanur et al. szerk.: (1972): Statistics: a quide to the unknown. Holden-Day, San Francisco.

MOZAIK
MÓDSZERTANI NAPOK

SZEGED, november 24. • VESZPRÉM, december 1.
ZALAEGERSZEG, december 2. • BUDAPEST, december 8.
SZOLNOK, január 7. • NYÍREGYHÁZA, január 8.
BUDAPEST, január 12. • SZEGED, február 19.

'98

ALSÓ TAGOZAT	MAGYAR NYELV – ERKÖLCSTAN	MATEMATIKA	SZÁMÍTÁSTECHNIKA – KÖNYVTÁRHASZNÁLAT	FIZIKA	BIOLÓGIA – KÉMIA	FÖLDRAJZ
GALGÓCZI LÁSZLÓNÉ/ ALBERTNÉ DR. HERBSZT MÁRIA *Anyanyelv, kommunikáció, szövegalkotás* (Anyanyelvi tankönyvcsalád kisiskolásoknak) **BALKOVITZNÉ CYNOLTER MAGDOLNA** *Szöveg- és versértelmezés alsó tagozatban*	**LERCHNÉ DR. EGRI ZSUZSA** *Az ismeretek alkalmazása és új ismeretek 7. osztályban* **BALOGHNÉ MAKÓ TERÉZ** *Az új tantárgy: az emberismeret-erkölcstan tanításának kérdései* (Embertani-erkölcstani munkatankönyv 4-8. osztály)	**VINCZE ISTVÁN** *Stratégiák, döntések, valószínűség az általános iskolában* **KOSZTOLÁNYI JÓZSEF** *Az aktivitás öröme a matematika tanulásában*	**ROZGONYI-BORUS FERENC** *A számítástechnika korszerű tanítása* (Informatika tankönyvcsalád 5-10. osztály) **KOKAS KÁROLY** *Klasszikus könyvtár és modern információs technológiák* (Informatika-könyvtárhasználat 5-8. oszt.)	**HALÁSZ TIBOR** *Haladó mozgás, energiaváltozás* **MISKOLCZI JÓZSEFNÉ** *A mechanika és a hőtan módszertani kérdései*	**JÁMBOR GYULÁNÉ** *Tankönyveink és a tanulás tanítása* **SIPOSNÉ KEDVES ÉVA** *Pillantás a szervetlen kémia anyagainak világába*	**VÍZVÁRI ALBERTNÉ** *A földrajzi ismeretek egymásra épülése és a tantervi követelmények* **MAKÁDI MARIANN** *Képességfejlesztés a természetismeret tanításában* (A Föld, amelyen élünk - természetismeret 5-6. osztály)

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 47-01-01, 470-052
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

A speciális esetek vizsgálata és az általánosítások szerepe a matematika tanításában és tanulásában

(Pap Margit)

SZOLNOK KÖNYVTÁR 2

Az 1993-96. évi amerikai középiskolai matematikai versenyvizsgák feladatai és megoldási kulcsai

(Dr. Kántor Sándorné)

A területszámítás tanításának egy lehetséges módja 13-14 éveseknél

(Skanderáné dr. Apor Mária)

VI. ÉVFOLYAM 1998 3-4

MAZAK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelő szerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 780 Ft.

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-7576

Készült
a Szegedi Kossuth Nyomdában
Felelős vezető: Gera Imre

TARTALOM

A speciális esetek vizsgálata és az általánosítások szerepe a matematika tanításában és tanulásában
Pap Margit, Kolozsvár

Az 1993-96. évi amerikai középiskolai matematikai versenyvizsgák feladatai és megoldási kulcsai
Dr. Kántor Sándorné, Debrecen

A generátorfüggvény alkalmazása Fibonacci-szerű sorozatok vizsgálatánál
Dr. Gerőcs László, Budapest

Válogatás az elmúlt tanév gimnáziumi felvételi vizsgáinak matematika feladataiból

Kenó matek
Kocsis Orsolya, Szolnok

Feladatrovat tanároknak

A területszámítás tanításának egy lehetséges módja 13-14 éveseknél
Skanderáné dr. Apor Mária, Nagyatád

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utalunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében adóazonosító számukat is. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Pap Margit

A speciális esetek vizsgálata és az általánosítások szerepe a matematika tanításában és tanulásában

A matematikatanítás célja nem szorítkozik csupán a tanulók tárgyi tudásának a gyarapítására, hanem e mellett fő cél a logikus gondolkodás fejlesztése. Ez magába foglalja a tanulók analizáló, szintetizáló, absztraháló, fogalom- és ítéletalkotó, konkretizáló, általánosító, következtetéseket végző, hipotéziseket felállító, bizonyításokat és ismereteket rendszerező képességeinek a fejlesztését.

A tanár feladata, hogy a tanórán olyan helyzeteket teremtsen, amelyekben tanári irányítás mellett az előbb felsorolt képességek fejlődésére lehetőség nyílik. Ilyen helyzeteket teremtünk például akkor, ha a tanulók figyelmét a speciális estek vizsgálata, illetve az esetleges általánosítások felé irányítjuk.

Speciális esethez jutunk, ha:

a) egy változót állandóval helyettesítünk,

b) a probléma feltételéhez új feltételt csatolunk,

c) a feltételek közül egyeseket elhagyunk.

Vizsgáljuk meg a speciális esetek vizsgálatának a szerepét a matematikatanításban!

1. Fontos szerepe van az alsóbb osztályokban, a fogalomalkotásban.

2. Speciális esetek vizsgálatából kiindulva a tanulókkal szabályokat, matematikai formulákat fedeztethetünk fel.

Példa. Newton binomiális képlete tanításánál a következőképpen szervezhetjük meg a tanórán a képlet felfedeztetését:

– Átismételjük az előző órán tanult Pascal háromszöget.

A Pascal háromszög $(n+1)$-dik sorában n-elem kombinációinak a száma szerepel, vagyis C_n^0, C_n^1, C_n^2,... C_n^n.

– Felírjuk a Pascal háromszög néhány sorát a táblára kétféleképpen.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

1. táblázat

C_0^0
C_1^0 C_1^1
C_2^0 C_2^1 C_2^2
C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3

2. táblázat

– A tanulók feladata, hogy önállóan felírják a következő hatványokat:

$$(a+b)^0,\ (a+b)^1,\ (a+b)^2,\ (a+b)^3$$

– Figyeljétek meg az együtthatókat! Hasonlítsátok össze az 1. 2. 3. 4-dik sorokban szereplő együtthatókat a Pascal háromszög megfelelő soraiban szereplő számokkal!

Mit vesztek észre? Fejezzétek ki a kombinációk számának segítségével az eddig ismert rövidített számítási képleteket:

$$(a+b)^0 = 1 = C_0^0$$
$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0a+C_1^1b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 =$$
$$C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3$$

3. táblázat

– Figyeljétek meg az a és b hatványait a 3. táblázatban! Mi történik a hatványaival?

Mi történik b hatványaival? Tekintsük például az $(a+b)^3$ kifejezését.

(Észrevesszük, hogy az együtthatók a Pascal háromszög negyedik sorában szereplő számok: C_3^0, C_3^1, C_3^2, C_3^3. Az a legnagyobb fokszáma 3, amely az első tagban jelenik meg. A második, harmadik, negyedik tagokban az a fokszáma mindig eggyel csökken az előző tagbeli fokszámhoz viszonyítva, a b fokszáma pedig mindig eggyel nő.

– Ennek alapján feladatként célszerű kitűzni $(a+b)^4$ kifejtését és annak ellenőrzését.

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = C_4^0a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^3ab^3+C_4^4+b^4$$

– Ellenőrzés:

$$(a+b)^4 = (a+b)^2 \cdot (a+b)^2 = \ldots$$

vagy

$$(a+b)^4 = (a+b) \cdot (a+b)^3 = \ldots$$

– Általánosítás.

Az ekképp megszervezett irányított felfedeztetésben a tanulók tevékenyen részt tudnak venni, és ezáltal a tanár érvényesíteni tudja az aktivitás elvét.

3. Tételek, tulajdonságok rögzítését, elmélyítését (integrációját) valósítjuk meg, ha ezeket speciális esetekben alkalmazzuk.

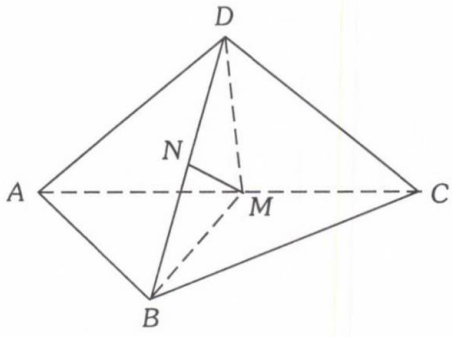
Példa

Tekintsük a konvex négyszögekre vonatkozó Euler-összefüggést! Ha $ABCD$ konvex négyszög és M, N az AC, illetve a BD átlók felezőpontja, akkor

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2. \quad (1)$$

Bizonyítás

Észrevesszük, hogy DM és BM súlyvonalak az ADC, illetve az ABC háromszögekben



1. ábra

(1-es ábra), tehát a súlyvonalra vonatkozó tétel alapján:

$$4DM^2 = 2(AD^2+DC^2)-AC^2$$
$$4BM^2 = 2(AB^2+BC^2)-AC^2$$

Összeadva a fenti kifejezéseket a következő összefüggést kapjuk:

$$2(DM^2+BM^2) = AD^2+DC^2+AB^2+BC^2-AC^2. \quad (2)$$

Másfelől MN súlyvonal a DMB háromszögben, ezért még a következő összefüggést is felírhatjuk:

$$4MN^2 = 2(DM^2+BM^2)-BD^2 \text{ vagyis} \quad (3)$$
$$2(DM^2+BM^2) = BD^2+4MN^2 \quad (4)$$

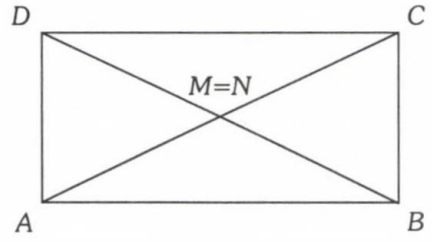
A (2)-es és a (4)-es összefüggések alapján azt kapjuk, hogy

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2-AC^2 = BD^2+4MN^2 \quad (5)$$

ahonnan azonnal következik az (1)-es összefüggés.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen érdekes ismert összefüggéseket kaptunk vissza az Euler-összefüggésből, speciális négyszögekre alkalmazzuk azt!

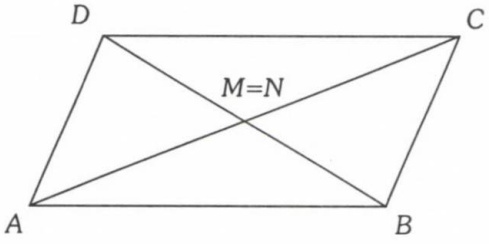
3. *a)* Legyen $ABCD$ téglalap. Mivel a téglalap átlói felezik egymást, ezért $M = N$, továbbá figyelembe véve, hogy a téglalap átlói, illetve a szemben fekvő oldalai egybevágóak az Euler-összefüggés a következőre redukálódik (2. ábra).



2. ábra

$$2(AB^2+AD^2) = 2BD^2. \qquad (6)$$

3.*b)* Legyen *ABCD* paralelogramma (3. ábra). Ebben az esetben is $M = N$, $AD = BC$ és



3. ábra

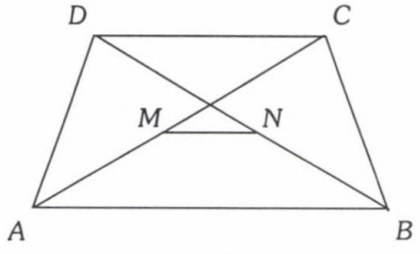
$AB = DC$, így az Euler-összefüggés alapján

$$2(AB^2+BC^2) = AC^2+BD^2 \qquad (7)$$

ami a paralelogramma egy ismert tulajdonsága.

3.*c)* Ha *ABCD* egy egyenlőszárú trapéz (4. ábra), akkor az (8)-ös összefüggést kapjuk:

$$AB^2+2BC^2+DC^2 = 2AC^2+4MN^2 \qquad (8)$$



4. ábra

Mivel az *AC* átlót ki tudjuk fejezni az oldalak függvényében, ezért a (8)-ból megkaphatjuk az *MN* hosszát a trapéz oldalainak függvényében.

Az előbb bemutatott tanítási-tanulási szituációkhoz hasonlóak hozzásegítik a tanulókat, hogy egy tétel, tulajdonság a tanuló kognitív struktúrájának stabil részévé váljon, és ezáltal a tanár érvényesíteni tudja a stabilizáció elvét.

4. A speciális esetek vizsgálata segít eloszlatni egy képlet helyessége körül támadt kételyeinket.

Példa

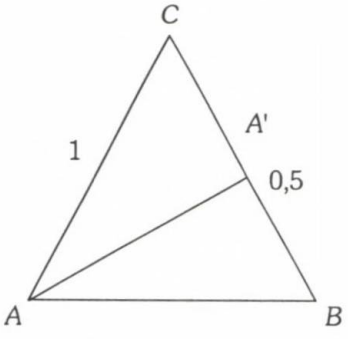
Tudjuk, hogy $\sin\frac{A}{2}$ és $\cos\frac{A}{2}$ értékét a

$$\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \text{és a} \quad \sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}}$$

képletek segítségével számítjuk ki, ahol *a*, *b*, *c* a háromszög oldalai, *p* a félkerületet jelöli. De ezek közül melyikkel egyenlő $\sin\frac{A}{2}$ és melyikkel egyenlő a $\cos\frac{A}{2}$?

A bizonytalanságunk eloszlatása végett, tekintsünk egy egységnyi oldalú szabályos háromszöget (5. ábra). Ekkor

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{A'C}{AC} = \frac{1}{2}.$$



5. ábra

A $\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ és a $\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}}$

képletekben ha $a=b=c=1$ és $p=\frac{3}{2}$ értékeket helyettesítjük, akkor

$$\sqrt{\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ illetve } \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)-1\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1\cdot 1}}=\frac{1}{2},$$

tehát

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}},$$

$\cos\frac{A}{2}$ pedig $\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{bc}}$.

5. A Schonfeld (1985) által kiegészített Pólya-modellben a feladatmegoldás keresési fázisának egyik mozzanata a speciális esetek vizsgálata. Egy feladat speciális esetei megoldásainak elemzése sok esetben ötletet ad az általános probléma megoldásához.

Példa

Tekintsük a következő trigonometriai egyenletet

$$\sin^n x - \cos^n x = 1,\ n \in N^*.$$

Keressük meg ezen egyenlet összes megoldását! A megoldások megkeresésében az okoz nehézséget, hogy az egyenletben a $\sin^n x$ és $\cos^n x$ szerepel, ahol n adott pozitív egész szám. Oldjuk meg először az egyenletet

$$n = 1,\ n = 2,\ n = 3 \text{ értékeire!}$$

Ha $n = 1$, akkor a $\sin x - \cos x = 1$ egyenlet megoldása nem okoz gondot.

Ha $n = 2$, akkor a $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$ egyenletet kapjuk. Ez esetben a bal oldal $-\cos 2x$-szel egyenlő, tehát az egyenletünk egyenértékű a $-\cos 2x = -1$ alapegyenlettel.

Ha $n = 3$, akkor $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$ egyenlet megoldása nem annyira egyszerű, mint az előző két esetben. Észrevesszük azonban, hogy az egyenlet jobb oldalát, az 1-et úgy is felírhatjuk mint

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x, \text{ így a}$$
$$\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

egyenlethez jutunk. A sin x-et és a cos x-et tartalmazó tagokat egy oldalra rendezve, majd mindkét oldalból a közös tényezőket kiemelve a következő egyenlethez jutunk:

$$\sin^2 x(\sin x - 1) = \cos^2 x(\cos x + 1).$$

Elemezzük az egyenlet jobb és bal oldalának az előjelét. Vegyük észre, hogy

$$\sin^2 x(\sin x - 1) \le 0 \text{ és } \cos^2 x(\cos x + 1) \ge 0$$

bármely valós x esetén.

Tehát a jobb oldal és bal oldal egyenlősége akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\sin^2 x(\sin - 1) = \cos^2 x(\cos x + 1) = 0.$$

Innen azonnal adódik, hogy az egyenlet megoldásai $x = (2k + 1)\pi$, illetve $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ alakú számok, ahol k egész szám. Elemezve az egyenlet megoldásának menetét, észrevesszük, hogy tetszőleges $n \ge 3$ természetes szám esetén is alkalmazható ez a megoldási eljárás. Tehát

$$\sin^n x - \cos^n x = 1 \Leftrightarrow \sin^n x - \cos^n x =$$
$$= \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow$$
$$\sin^2 x(\sin^{n-2} x - 1) = \cos^2 x(\cos^{n-2} x + 1).$$

Mivel a bal oldal kisebb vagy egyenlő mint nulla és a jobb oldal nagyobb vagy egyenlő, mint nulla minden x-re, ezért a jobb és bal oldal egyenlősége akkor és csakis akkor állhat fenn, ha

$$\sin^2 x(\sin^{n-2} x - 1) = \cos^2 x(\cos^{n-2} x + 1) = 0.$$

Ha n páros, akkor az előző egyenletrendszernek a megoldásai

$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ és $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ alakúak, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

Ha n páratlan, akkor az egyenletrendszer megoldásai

$x=(2k+1)\pi$ és $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ alakúak, ahol $k\in\mathbb{Z}$.

6. Bizonyos típusú feladatok esetén a speciális esetek vizsgálata során megkapjuk a feladat megoldását. Ilyenek például a függvényegyenletes feladatok.

Példa

Határozzuk meg az összes $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényeket, amelyek a következő tulajdonsággal rendelkeznek:

$f(0)\neq 0$ és $f(x)\cdot f(y)=f(x+xy)$ (9)

bármely valós x-re és y-ra.

Megoldás

Ha a megadott összefüggésbe y helyére 0 írunk, akkor az $f(x)\cdot f(0)=f(x)$, bármely valós x-re, összefüggéshez jutunk. Ez egyenértékű a $f(x)\cdot(f(0)-1)=0$, bármely valós x-re. Ez utóbbi nem lehetséges, mivel $f(0)\neq 0$.

Tehát $f(0)=1$. Ha a *(9.)*-es összefüggésben y helyébe -1-et írunk, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$f(x)\cdot f(-1)=f(0)$ minden $x\in\mathbb{R}$, azaz

$f(x)\cdot f(-1)=1$ minden x –re vagyis

$f(x)=\frac{1}{f(-1)}$ minden $x\in\mathbb{R}$,

ami azt jelenti, hogy f állandó függvény. Figyelembe véve, hogy $f(0)=1$ következik, hogy $f(x)=1$ bármely valós x-re.

7. Amint ismeretes egy tétel speciális eseteinek az igazolása nem helyettesítheti az általános tulajdonság, tétel bizonyítását. Azonban a tanórán, amikor az általános eset és a speciális eset bizonyítása logikai szempontból egyenértékű, csak az előbbi nagyobb formalizációt igényel, mint a speciális eset igazolása, akkor praktikusabb a tanórán csak a speciális eset bizonyítását bemutatni.

Példa

Tekintsük a következő tételt.

Legyen $f(x)=ax^2+bx+c$, egy egész együtthatós polinom, és legyen $\alpha=\frac{m}{n}$ a polinom gyöke, ahol m, n relatív prímek, $n\neq 0$. Akkor m osztója a szabad tagnak (c-nek) és n osztója a legmagasabb fokszámú tag együtthatójának (a-nak).

Bizonyítás

Mivel $a=\frac{m}{n}$ gyöke a polinomnak, ezért

$$a\frac{m^2}{n^2}+b\frac{m}{n}+c=0\Leftrightarrow \quad (10)$$

$$am^2+bmn+cn^2=0\Leftrightarrow \quad (11)$$

$$m(am+bn)=-cn^2, \quad (12)$$

ahonnan következik, hogy m osztója cn^2-nek. Mivel m és n relatív prímek, ezért m és n^2 is azok, ezért m szükségszerűen osztója kell legyen c-nek.

Másfelől a *(10.)*-as összefüggés alapján

$$n(bm+cn)=-am^2, \quad (13)$$

ahonnan az előbbihez hasonlóan következik, hogy n osztója a-nak.

Igazoltunk egy tulajdonságot a másodfokú egész együtthatós polinomra vonatkozóan. Próbáljunk megfogalmazni egy hasonló tulajdonságot egy n-ed fokú egész együtthatós polinom esetén.

Tétel

Ha az $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$

egy egész együtthatós polinom és $\alpha=\frac{m}{n}$ gyöke a polinomnak, akkor m osztója a szabadtagnak és n osztója a legmagasabb fokszámú tag együtthatójának.

Amint láttuk, a sajátos esetek vizsgálatával párhuzamosan a bemutatott tanítási szituációkban jelen volt az általánosítás is.

Milyen más tanítási szituációkban érdemes használni az általánosítást?

Vannak feladatok, amelyek a megoldás szempontjából nem lényeges adatokat tartalmaznak. Ilyenkor hasznosnak bizonyul egy általánosabb probléma megoldása.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2-x} - \sqrt[3]{x-1} = x$$

Megoldás

Az egyenlet értelmezési halmaza $\pi[-\infty,2]$. Első ránézésre az az ötlet juthatna eszünkbe, hogy bevezessük az $y = \sqrt[3]{x-1}$ új ismeretlent. Ekkor $x = y^3+1$, és a következő egyenlethez jutunk:

$$\sqrt{1-y^3} - y = y^3 + 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-y^3} = y^3 + y + 1$$

Viszont mindkét oldal négyzetre emelése után egy hatodfokú egyenletet kapunk, amely gyökeinek megkeresése gondot okoz.

Próbáljuk általánosítani a feladatot! Oldjuk meg a következő egyenletet:

$\sqrt[m]{2-x} - \sqrt[n]{x-1} = x$, $m, n \geq 1$ egész számok

Ennél a feladatnál már senkinek sem jut eszébe m-edik, illetve n-edik hatványra emelni, hanem valami más úton próbáljuk megoldani a feladatot.

Tekintjük az $f(x) = \sqrt[m]{2-x} - \sqrt[n]{x-1} - x$ függvényt. Észrevesszük, hogy f csökkenő a maximális értelmezési halmazon, továbbá észrevesszük azt, hogy $f(1) = 0$, ennek alapján $x = 1$ az egyedüli megoldása az egyenletnek, minden egynél nagyobb m, n egész értékére.

Egy feladat általánosítása során néha a matematika olyan területeire hatolunk be, ahol egy magasabb matematikai apparátus segítségével könnyedén meg tudjuk oldani azt.

Példa

Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n}\right).$$

Alakítsuk át az előbbi határértéket a következőképpen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^3}$$

Jelöljük $\frac{1}{n}$-et x-szel. Ha n tart végtelenhez, akkor x tart nullához. Tehát elegendő a következő függvényhatárértéket kiszámolnunk:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Ez a határérték egy $\frac{0}{0}$ határozatlansági eset. Kiszámítására a legalkalmasabb az L' Hospital-szabály egymásután kétszeri alkalmazása:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

A bemutatott és a bemutatottakhoz hasonló szituációk elengedhetetlen eszközei a matematikai gondolkodás fejlesztésének.

Dr. Kántor Sándorné

Az 1993–96. évi amerikai középiskolai matematikai versenyvizsgák feladatai és megoldási kulcsai

48 éve rendezik meg az USA-ban matematikai tehetségek felkutatására a matematikai versenyvizsgát, az AHSME-t. Bár a vizsga szabályai, illetve a pontozás módja az évek során változott, ez a verseny lényegét nem befolyásolta.

A tanulók saját iskolájukban írják a versenyvizsgát. a kidolgozás ideje 90 perc. A tanulók számára 30 feladat van kitűzve, melyek feleletválasztós tesztfeladatok. Zsebszámológép nem használható. Minden helyes válaszért 5 pontot kap a tanuló, a helytelen válaszért 0 pont jár, míg a megválaszolatlanul hagyott kérdésért 2 pont. A 100 pont feletti teljesítményt igen jónak tartják, ezek a tanulók kapnak meghívást a verseny 2. fordulójába (AIME), ahol 15 tesztfeladatot (számválaszos feladatot) kell megoldaniuk.

A verseny igen jól méri a matematikai tehetséget, aki csak tippel, az nem tud magas pontszámot elérni, viszont ez a forma gyors és precíz munkára sarkallja a versenyzőket.

Nagyon nehéz a maximális 150 pontot elérni. Gyakorlatunkban egy tanuló esetén tapasztaltuk ezt a kiváló teljesítményt, ez a tanulónk viszont kétszer nyert aranyérmet a nemzetközi matematikai diákolimpián.

A következőkben bemutatjuk az 1993–1996. évi AHSME feladatait, majd megadjuk a kódokat, utalunk a problémásabb feladatokra, illetve ismertetjük néhány valószínűség számítási feladat megoldását.

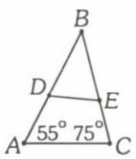
Az 1993. évi AHSME feladatai

1. Ha a, b, c egész számok, akkor jelentse $\boxed{a, b, c}$ az $a^b - b^c + c^a$ értéket. Ekkor $\boxed{1,-1,2}$ =

A) -4 *B)* -2 *C)* 0 *D)* 2 *E)* 4

2. Az ABC Δ-ben $A\sphericalangle = 55°$, $C\sphericalangle = 75°$, továbbá D az AB, E pedig a BC oldalon van. Ha $DB = BE$, akkor $BED\sphericalangle$ =

A) 50°
B) 55°
C) 60°
D) 65°
E) 70°



3. $\dfrac{15^{30}}{45^{15}} =$

A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ *B)* $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$ *C)* 1 *D)* 3^{15} *E)* 5^{15}

4. Értelmezzük a „$\circ$” műveletet az $x \circ y = 4x - 3y + xy$ képlettel, ha x és y valós számok. Hány y valós számra igaz, hogy $3 \circ y = 12$?

A) 0 *B)* 1 *C)* 3 *D)* 4 *E)* több mint 4

5. A múlt évben egy kerékpár ára 16 000 Ft, egy kerékpáros bukósisak ára pedig 4000 Ft volt. Ebben az évben a kerékpár ára 5%-kal, a sisak ára 10%-kal emelkedett. Hány

százalékkal emelkedett ekkor a kerékpár és a sisak együttes költsége?

A) 6% *B)* 7% *C)* 7,5% *D)* 8% *E)* 15%

6. $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}} =$

A) $\sqrt{2}$ *B)* 16 *C)* 32 *D)* $12^{2/3}$ *E)* 512,5

7. Jelentse R_k azt a tízes számrendszerben felírt számot, amely k db 1-es számjegyből áll. Pl. $R_3 = 111$, $R_5 = 11111$ stb. Ha R_{24}-et elosztjuk R_4-gyel, akkor a hányados tízes számrendszerbeli alakja csupa 1 és 0 számjegyekből áll. A nulla jegyek száma

A) 10 *B)* 11 *C)* 12 *D)* 13 *E)* 15

8. Legyenek C_1 és C_2 ugyanazon síkban fekvő, egymást érintő egységsugarú körök. Hány olyan 3 egység sugarú kör található ugyanebben a síkban, amely mindkét kört érinti?

A) 2 *B)* 4 *C)* 5 *D)* 6 *E)* 8

9. Egy A ország lakossága a világ népességének c%-a, a lakosság vagyona pedig a világ összvagyonának d%-a. A B országra vonatkozó ugyanilyen adatok pedig e%, illetve f%. Tételezzük fel, hogy az A-, illetve B-beli lakosok között a vagyon egyenlő arányban oszlik szét. Állapítsuk meg, hogy egy A-beli lakos vagyona hogyan aránylik egy B-beli lakos vagyonához.

A) $\frac{cd}{ef}$ *B)* $\frac{ce}{df}$ *C)* $\frac{cf}{de}$ *D)* $\frac{de}{cf}$ *E)* $\frac{df}{ce}$

10. Legyen r az a szám, amely úgy áll elő, hogy az a^b hatványban az alapot is és a kitevőt is háromszorosára növeljük ($a, b > 0$). Ha r egyenlő a^b és x^b szorzatával (ahol $x > 0$), akkor $x =$

A) 3 *B)* $3a^2$ *C)* $27a^2$ *D)* $2a^{3b}$ *E)* $3a^{2b}$

11. Ha $\log_2(\log_2(\log_2(x))) = 2$, akkor az x szám tízes számrendben felírt alakjában a jegyek száma

A) 5 *B)* 7 *C)* 9 *D)* 11 *E)* 13

12. Ha $f(2x) = \frac{2}{2+x}$ minden $x > 0$ esetén, akkor $2f(x) =$

A) $\frac{2}{1+x}$ *B)* $\frac{2}{2+x}$ *C)* $\frac{4}{1+x}$ *D)* $\frac{4}{2+x}$ *E)* $\frac{8}{4+x}$

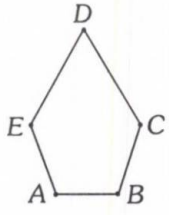
13. Egy 20 egység kerületű négyzetet beírunk egy 28 egység kerületű négyzetbe. Mekkora a beírt négyzet csúcsainak a körülírt négyzet csúcsaitól való távolságai közül a legnagyobb?

A) $\sqrt{58}$ *B)* $\frac{7\sqrt{5}}{2}$ *C)* 8 *D)* $\sqrt{65}$ *E)* $5\sqrt{3}$

14. Az $ABCDE$ konvex ötszögben $A\sphericalangle = B\sphericalangle = 120°$, $EA = AB = BC = 2$ és $CD = DE = 4$.

Mekkora az $ABCDE$ ötszög területe?

A) 10
B) $7\sqrt{3}$
C) 15
D) $9\sqrt{3}$
E) $12\sqrt{5}$



15. Az n hány értékére teljesül az, hogy az n oldalú szabályos sokszög belső szögei fokokban mérve egész számok?

A) 16 *B)* 18 *C)* 20 *D)* 22 *E)* 24

16. Készítsük el az alábbi számsorozatot 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ..., amelyben az n-edik pozitív egész szám éppen n-szer fordul elő. Ekkor a sorozat 1993-adik elemének öttel való osztási maradéka

A) 0 *B)* 1 *C)* 2 *D)* 3 *E)* 4

17. Egy négyzet alakú órát a középpontjából kiinduló, az egész órákon áthaladó félegyenesekkel 12 tartományra bontunk. Ha t a 12 és 1

órán áthaladó félegyenesek által bezárt tartomány területe, q pedig az 1 és 2 óra közöttié, akkor $\frac{q}{t} =$

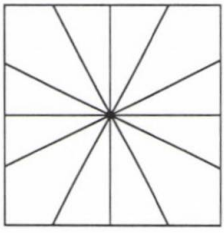
A) $2\sqrt{3}-2$

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) 2



18. Albert és Béla ugyanazon a napon kezdenek el dolgozni új munkahelyükön. Albert munkarendjében három munkanapot egy pihenőnap követ, Béláéban pedig 7 munkanap után 3 pihenőnap jár. Az elkövetkező 100 nap alatt hány esetben van a pihenő napjuk ugyanazon a napon?

A) 48 *B)* 50 *C)* 72 *D)* 75 *E)* 100

19. Hány rendezett $(m; n)$ pozitív egész számpár megoldása van a $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$ egyenletnek?

A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* több mint 4

20. Tekintsük a $10x^2 - 3ix - k = 0$ másodfokú egyenletet. Állapítsuk meg, hogy az alábbi állítások közül melyik érvényes ($i^2 = -1$)!

A) Bármely pozitív valós k esetén mindkét gyök tiszta képzetes.

B) Bármely negatív valós k esetén mindkét gyök tiszta képzetes.

C) Bármely tiszta képzetes k esetén mindkét gyök valós és racionális.

D) Bármely tiszta képzetes k esetén mindkét gyök valós és irracionális.

E) Bármely komplex k esetén egyik gyök sem valós.

21. Legyen $a_1, \ldots, a_k$ egy olyan véges számtani sorozat, amelyre

$$a_4+a_7+a_{10} = 17$$
$$\text{és } a_4+a_5+\ldots+a_{14} = 77.$$

Ha $a_k = 13$, akkor $k =$

A) 16 *B)* 18 *C)* 20 *D)* 22 *E)* 24

22. Húsz kockát az ábra szerint helyezünk el. Először 10-et háromszög alakban, majd 6-ot egy szinttel feljebb úgy, hogy bármely kocka pontosan hármat érint az alatta levőek közül. A harmadik szintre ugyanígy 3 kockát teszünk, majd végezetül a negyedik szintre egy kockát. Az első szinten található kockákat egytől tízig megszámozzuk, majd a 2., 3. és 4. szint kockáiba beírjuk a közvetlen alatta levő kockába rendelt számok összegét. Ekkor a legfelső kockához rendelt szám lehetséges legkisebb értéke

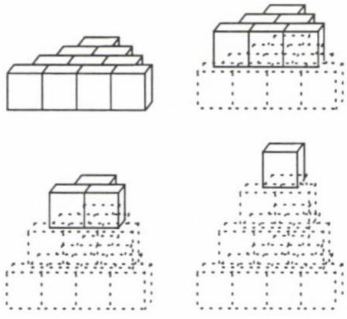
A) 55

B) 83

C) 114

D) 137

E) 144



23. Az A, B, C és D pontok egy egységnyi átmérőjű körön vannak, X pedig a kör AD átmérőjén. Ha $BX = CX$ és $3\,BAC\sphericalangle = BXC\sphericalangle = 36°$, akkor $AX =$

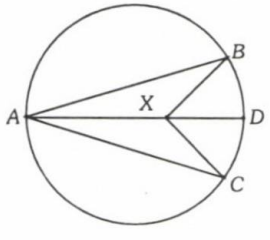
A) $\cos 6° \cdot \cos 12° \cdot \sec 18°$

B) $\cos 6° \cdot \sin 12° \cdot \csc 18°$

C) $\cos 6° \cdot \sin 12° \cdot \sec 18°$

D) $\sin 6° \cdot \sin 12° \cdot \csc 18°$

E) $\sin 6° \cdot \sin 12° \cdot \sec 18°$

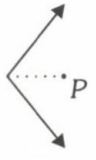


24. Egy dobozban 3 fényes és 4 rozsdás érme van. Véletlenszerűen egyesével kivesszük az érmeket a dobozból. Ha annak a valószínűsége, hogy több mint négy húzás után jelenik meg az összes fényes érme, egyenlő $\frac{a}{b}$ -vel, (ahol a és b relatív prímek), akkor $a+b =$

A) 11 *B)* 20 *C)* 35 *D)* 58 *E)* 66

25. Legyen S két, egymással 120°-os szöget bezáró, közös pontból induló félegyenes pontjainak halmaza. Legyen továbbá P az így keletkezett szög szögfelezőjén egy rögzített pont. Tekintsük azokat a szabályos PQR háromszögeket, amelyeknek Q, R csúcsa S-beli pont. (Q és R lehet ugyanazon a félegyenesen is; a Q és R megcserélésével nyert háromszög nem különbözik az előzőtől). Ekkor az így keletkezett PQR háromszögek száma

A) pontosan 2
B) pontosan 3
C) pontosan 7
D) pontosan 15
E) több mint 15



26. Határozzuk meg az alábbi függvény által felvett legnagyobb pozitív értéket

$F(x)=\sqrt{8x-x^2}-\sqrt{14x-x^2-48}$,
(x valós szám).

A) $\sqrt{7}-1$
B) 3
C) $2\sqrt{3}$
D) 4
E) $\sqrt{55}-\sqrt{5}$

27. Az $ABC_\triangle$ oldalai 6, 8 és 10 hosszúak. Egy P középpontú, egységsugarú kör a háromszög belsejében van, végiggördül a háromszög oldalain azok közül legalább egyet érintve. Mekkora utat tesz meg P egy teljes körüljárás alatt?

A) 10 *B)* 12 *C)* 14 *D)* 15 *E)* 17

28. Hány olyan pozitív területű háromszög van, amelynek csúcsai az xy-síkban $1 \le x \le 4$ és $1 \le y \le 4$ feltételnek eleget tevő egész koordinátájú pontok?

A) 496 *B)* 500 *C)* 512 *D)* 516 *E)* 560

29. A következő öt számhármas közül melyik NEM lehet egy téglatest három lapátlójából alkotott számhármas?

A) 4,5,6 *B)* 4,5,7 *C)* 4,6,7
D) 5,6,7 *E)* 5,7,8

30. Adott $0 \le x_0 < 1$ esetén legyen

$$x_n = \begin{cases} 2x_{n-1}, & ha\ 2x_{n-1} < 1 \\ 2x_{n-1}-1, & ha\ 2x_{n-1} \ge 1 \end{cases}$$

minden $n>0$-ra.
Hány x_0-ra igaz, hogy $x_0 = x_5$?

A) 0 *B)* 1 *C)* 5 *D)* 31 *E)* végtelen sok

A megoldási kulcs:

D–D–E–E–A–B–E–D–D–C–A–E–D–B–D–D –A–E–D–B–B–C–B–E–E–C–B–D–B–D.

Megjegyzések:

1. A komplex szám fogalmát ismernie kell a versenyzőnek.

2. Problémát okozhat az is, hogy a sec, illetve a csc szögfüggvényeket mi nem használjuk

$$\left(\sec A=\frac{1}{\cos A},\ \csc B=\frac{1}{\sin B}\right).$$

3. A feladatok között van valószínűségszámítási feladat is.

4. Nehéznek bizonyult a 22. feladat, amelynek megoldása jó térszemléletet igényelt.

5. A 24. feladat megoldása a következő:

$\binom{7}{4}$-féleképpen lehet az első 4 érmét kihúzni.

$\binom{3}{3}\binom{4}{1}$-féleképpen lehet kiválasztani 3 fényes

és egy rozsdás érmét. Így annak a valószínűsége, hogy az első 4 húzásban 3 fényes és 1 rozsdás érme lesz

$$\binom{3}{3}\binom{4}{1}:\binom{7}{4}=\frac{4}{35}$$

a keresett valószínűség tehát: $1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$

Az 1994. évi AHSME feladatai

1. $4^4 \cdot 9^4 \cdot 4^9 \cdot 9^9 =$

A) 13^{13} *B)* 13^{36} *C)* 36^{13} *D)* 36^{36} *E)* 1296^{26}

2. Egy nagy téglalapot négy kisebb téglalapra bontottunk két olyan szakasszal, amelyek párhuzamosak a nagy téglalap oldalaival. A kis téglalapok közül háromnak a területét feltüntettük az ábrán. Mennyi a negyedik kis téglalap területe?

A) 10
B) 15
C) 20
D) 21
E) 25

6	14
?	35

3. Az alábbi kifejezések közül hány darab egyenlő az x^x+x^x összeggel minden $x > 0$ esetén?

I : $2x^x$ II : x^{2x} III : $(2x)^x$ IV : $(2x)^{2x}$

A) 0 *B)* 1 *C)* 2 *D)* 3 *E)* 4

4. Az xy síkban a $(-5; 0)$ és $(25; 0)$ pontokat összekötő szakasz egy kör átmérője. Ha az $(x; 15)$ pont ennek a körnek egy pontja, akkor $x =$

A) 10 *B)* 12,5 *C)* 15 *D)* 17,5 *E)* 20

5. Géza meg akart szorozni egy számot 6-tal, de ehelyett elosztotta 6-tal. Ezután az így kapott számhoz hozzá akart adni 14-et, de ehelyett levont belőle 14-et. Így 16-ot kapott eredményül. Ha Géza helyesen végezte volna el a tervezett műveleteket, a kapott eredmény

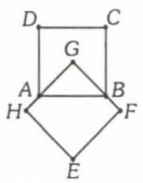
A) 400-nál kisebb lenne
B) 400 és 600 közé esne
C) 600 és 800 közé esne
D) 800 és 1000 közé esne
E) 1000-nél nagyobb lenne

6. Az ..., a, b, c, d, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,... sorozat minden eleme a tőle balra álló két elem összege. Meghatározandó az a elem értéke.

A) -3 *B)* -1 *C)* 0 *D)* 1 *E)* 3

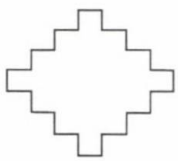
7. Az $ABCD$ és az $EFGH$ négyzetek egybevágóak, $AB = 10$ és G az $ABCD$ négyzet középpontja. A két négyzet által együttesen lefedett síkidom területe

A) 75
B) 100
C) 125
D) 150
E) 175



8. Az ábrán látható sokszög minden oldala merőleges a vele szomszédos oldalakra, és mind a 28 oldal ugyanolyan hosszúságú. A sokszög kerülete 56. A sokszög területe

A) 84
B) 96
C) 100
D) 112
E) 196



9. Ha az α szög négyszerese a β szögnek, és a β szög pótszöge négyszerese az α szög pótszögének, akkor $\beta =$

A) 10° *B)* 12° *C)* 15° *D)* 18° *E)* 22,5°

10. Jelölje $M(x, y)$ az egymástól különböző x és y valós számok közül a nagyobbikat, $m(x, y)$ pedig a kisebbiket. Ha $a < b < c < d < e$, akkor

$$M(M(a, m(b, c)), m(d, m(a, e))) =$$

A) a *B)* b *C)* c *D)* d *E)* e

11. Három kockát, melyeknek térfogata rendre 1, 8 és 27, a lapjaik mentén egymáshoz ragasztunk. Az így keletkező test lehetséges legkisebb felszíne

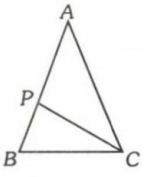
A) 36 *B)* 56 *C)* 70 *D)* 72 *E)* 74

12. Ha $i^2 = -1$, akkor $(i - i^{-1})^{-1} =$

A) 0 *B)* $-2i$ *C)* $2i$ *D)* $-i/2$ *E)* $i/2$

13. Az ABC háromszögben $AB = AC$. Ha van egy P pont szigorúan az A és B pontok között úgy, hogy $AP = PC = CB$, akkor az A csúcsnál fekvő szög

A) 30°
B) 36°
C) 48°
D) 60°
E) 72°



14. A $20+20\frac{1}{5}+20\frac{2}{5}+ \ldots +40$ számtani sorozat összege

A) 3000 *B)* 3030 *C)* 3150 *D)* 4100 *E)* 6000

15. Hány darab olyan n eleme van az {1, 2, 3,..., 100} halmaznak, amelyre az n^2 tízes helyiértékű számjegye páratlan?

A) 10 *B)* 20 *C)* 30 *D)* 40 *E)* 50

16. Egy táskában piros és kék golyók vannak. Ha egy piros golyót kivennénk, a táskában maradó golyók egyhetede lenne piros. Ha két kék golyót vennénk ki, a bentmaradó golyók egyötöde lenne piros. Hány golyó van a táskában?

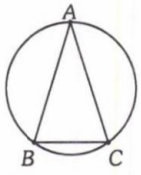
A) 8 *B)* 22 *C)* 36 *D)* 57 *E)* 71

17. Egy 8 és $2\sqrt{2}$ oldalú téglalap középpontja egybeesik egy 2 sugarú kör középpontjával. A téglalap és a körlap közös részének területe

A) 2π
B) $2\pi+2$
C) $4\pi - 4$
D) $2\pi+4$
E) $4\pi - 2$

18. Az ABC háromszög szögeire $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 4 \sphericalangle A$ teljesül. Ha B és C szomszédos csúcsai egy olyan szabályos n-szögnek, amelynek körülírt köre megegyezik az ABC háromszög körülírt körével, akkor $n =$

A) 5
B) 7
C) 9
D) 15
E) 18



19. Egy lemezt megcímkéztünk az „1", két lemezt a „2", három lemezt a „3", ..., ötven lemezt az „50" jelzéssel. Az így megjelölt $1+2+3+...+50 = 1275$ lemezt egy dobozba tesszük, majd onnan véletlenszerűen, visszatevés nélkül kihúzunk közülük néhányat. Ha azt akarjuk, hogy a kihúzott lemezek között biztosan legyen legalább tíz azonos címkéjű, akkor legalább hány lemezt kell kihúznunk?

A) 10 *B)* 51 *C)* 415 *D)* 451 *E)* 501

20. Legyenek x, y, z egy olyan mértani sorozat egymás után következő elemei, amelynek hányadosa r, úgy, hogy $x \neq y$. Ha x, $2y$, $3z$ egy számtani sorozat egymás után következő elemei, akkor $r =$

A) $\frac{1}{4}$ *B)* $\frac{1}{3}$ *C)* $\frac{1}{2}$ *D)* 2 *E)* 4

21. Hány ellenpélda létezik az alábbi állításra?

„Ha N egy páratlan pozitív egész szám, amelynek a számjegyei nullától különbözőek és az összegük 4, akkor N prímszám."

A) 0 *B)* 1 *C)* 2 *D)* 3 *E)* 4

22. Egy sorban kilenc szomszédos szék van fenntartva hat hallgató, valamint Alfa, Béta és Gamma professzorok számára. Ez a három professzor a hallgatók előtt érkezik meg, és úgy akar helyet foglalni, hogy mindegyikük két hallgató között üljön. Hányféleképpen helyezkedhetnek el a professzorok?

A) 12 *B)* 36 *C)* 60 *D)* 84 *E)* 630

23. Tekintsük az xy-síkban azt a vízszintes és függőleges szakaszok által határolt L-alakú tartományt, melynek csúcsai (0; 0), (0; 3), (3; 3), (3; 1), (5; 1) és (5; 0). Annak az origón áthaladó egyenesnek, amelyik ezt a tartományt két egyenlő területű részre osztja, a meredeksége

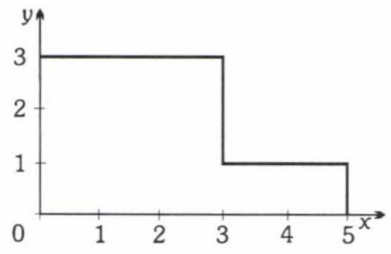
A) $\frac{2}{7}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{7}{9}$



24. Egy öt elemű mintasokaság számtani közepe 10, a mediánja (az elemeket növekvőleg felsorolva a középső, tehát öt elem esetén a harmadik helyen álló érték) pedig 12. Ekkor a mintaterjedelem (a legnagyobb és a legkisebb mintaelem különbsége) lehetséges legkisebb értéke

A) 2 *B)* 3 *C)* 5 *D)* 7 *E)* 10

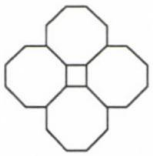
25. Ha x és y olyan nullától különböző valós számok, amelyekre

$|x|+y = 3$ és $|x|y+x^3 = 0$, akkor az $x - y$ számhoz legközelebb eső egész szám

A) -3 *B)* -1 *C)* 2 *D)* 3 *E)* 5

26. Egy szabályos m-szöget pontosan (tehát átfedések és rések nélkül) körbezártunk m darab szabályos n-szöggel (mint a mellékelt ábrán látható $m = 4$, $n = 8$ esetén). Ha $m = 10$, mennyi n értéke?

A) 5
B) 6
C) 14
D) 20
E) 26



27. Egy zacskó pattogatásra szánt kukorica 2/3 részben fehér magokat és 1/3 részben sárga magokat tartalmaz. A fehér magoknak csak a fele, a sárga magoknak pedig a 2/3 része pukkasztható ki. A zacskóból véletlenszerűen kiveszünk egy magot, és azt tapasztaljuk, hogy sikerül kipukkasztanunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott mag fehér volt?

A) $\frac{1}{2}$ *B)* $\frac{5}{9}$ *C)* $\frac{4}{7}$ *D)* $\frac{3}{5}$ *E)* $\frac{2}{3}$

28. Az xy-síkban hány olyan egyenes illeszkedik a (4; 3) pontra, amelyik az x-tengelyt egy pozitív prímszám abszcisszájú pontban, az y-tengelyt pedig egy pozitív egész ordinátájú pontban metszi?

A) 0 *B)* 1 *C)* 2 *D)* 3 *E)* 4

29. Az A, B és C pontok úgy helyezkednek el egy r sugarú körvonalon, hogy $AB = AC$, $AB > r$, és a rövidebbik BC ív hossza r. Ha a szögeket radiánban mérjük, akkor $AB/BC =$

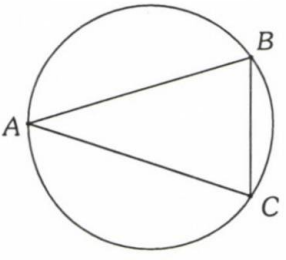
A) $\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{4}\right)^{-1}$

B) $2\cos\frac{1}{2}$

C) $4\sin\frac{1}{2}$

D) $\left(\sin\frac{1}{2}\right)^{-1}$

E) $2\left(\cos\frac{1}{2}\right)^{-1}$



30. Annak az eseménynek, hogy n darab szabályos 6-oldalú dobókockát dobva a kapott számok összege 1994, nagyobb a valószínűsége, mint nulla, és megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy a kapott számok összege S. Az S szám lehetséges legkisebb értéke

A) 333 *B)* 335 *C)* 337 *D)* 339 *E)* 341

A megoldási kulcs:

C–B–B–A–E–A–E–C–D–B–D–D–B–B–B–B –D–C–C–B–C–C–E–C–A–A–D–C–A–C.

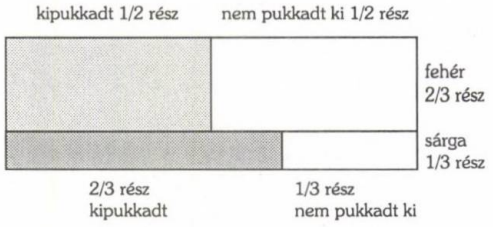
Megjegyzések:

1. Szükségünk van ismét a képzetes egység és a medián fogalmának az ismeretére.

2. A 16. feladat az 1996. jún. 10-i matematika érettségi-felvételi pótírásbeli 1. feladataként lett kitűzve.

3. A 27. feladatnak van egy szép és nem nehéz szemléletes megoldása:

Elkészítjük a következő ábrát:



$$P=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}$$

Az 1995. évi AHSME feladatai

1. Kinga az első három matematika dolgozatában 87, 83 és 88 pontot szerzett. Ha a negyedik dolgozatára 90 pontot kap, akkor az átlaga

A) változatlan marad
B) 1-gyel növekszik
C) 2-vel növekszik
D) 3-mal növekszik
E) 4-gyel növekszik

2. Ha $\sqrt{2+\sqrt{x}}=3$, akkor $x=$

A) 1 *B)* $\sqrt{7}$ *C)* 7 *D)* 49 *E)* 121

3. Egy készüléket az áruházban 9999 forintért lehet megvenni. Egy csomagküldő szolgálat televíziós hirdetésében ugyanezt a terméket háromhavi részletfizetéssel kínálja 2998 forintos havi részletre és egyszeri 998 forint kezelési és postaköltséggel. Mennyit takaríthatnak meg, ha a készüléket a csomagküldő szolgálattól vásároljuk meg?

A) 6 forintot
B) 7 forintot
C) 8 forintot
D) 9 forintot
E) 10 forintot

4. Ha M 30%-a Q-nak, Q 20%-a P-nek és N 50%-a P-nek, akkor $\frac{M}{N}=$

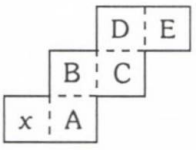
A) $\frac{3}{250}$ *B)* $\frac{3}{25}$ *C)* 1 *D)* $\frac{6}{5}$ *E)* $\frac{4}{3}$

5. Egy téglalap alakú mező 300 láb széles és 400 láb hosszú. Véletlenszerű mintavétel azt mutatja, hogy a mezőn átlagosan három hangya található négyzethüvelykenként (12 hüvelyk = 1 láb). A következő számok közül melyik közelíti meg legjobban a mezőn található hangyák számát?

A) 500 ezer
B) 5 millió
C) 50 millió
D) 500 millió
E) 5 milliárd

6. Az ábrán látható alakzatból kocka hajtogatható. Az így kapott kockában melyik – nagybetűvel megjelölt – lap lesz szemben az x jelű lappal?

A) A
B) B
C) C
D) D
E) E

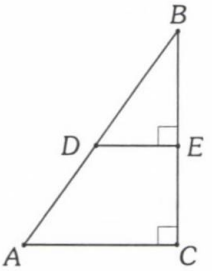


7. A Föld sugara az egyenlítőnél körülbelül 4000 mérföld. Tegyük fel, hogy egy repülőgép egyszer körülrepüli a Földet, a földfelszínhez képest óránként 500 mérföldes sebességgel. Ha a repülőgép az egyenlítő felett elhanyagolható magasságban halad, akkor a repüléssel töltött órák számára az alábbi lehetőségek közül a legjobb becslés

A) 8 *B)* 25 *C)* 50 *D)* 75 *E)* 100

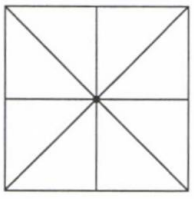
8. Az ABC háromszög C-nél fekvő szöge $90°$, $AC = 6$ és $BC = 8$. Az $\overline{AB}$, ill. $\overline{BC}$ szakaszon fekvő D, illetve E pontokra $BED\sphericalangle = 90°$ teljesül. Ha $DE = 4$, akkor $BD =$

A) 5
B) $\frac{16}{3}$
C) $\frac{20}{3}$
D) $\frac{15}{2}$
E) 8



9. Tekintsünk egy olyan alakzatot, amelyik egy négyzetből, annak átlóiból és a szemközti oldalak felezőpontjait összekötő szakaszokból áll. Az alakzatban lévő összes (nem feltétlenül azonos méretű) háromszögek száma:

A) 10
B) 12
C) 14
D) 16
E) 18



10. Az $y = x$, $y = -x$ és $y = 6$ egyenletű egyenesek által határolt háromszög területe

A) 12 *B)* $12\sqrt{2}$ *C)* 24 *D)* $24\sqrt{2}$ *E)* 36

11. Hány darab, a tízes számrendszerben felírva $N = \overline{abcd}$ alakú, négyjegyű szám teljesíti az (i) $4000 \le N < 6000$; (ii) N osztható 5-tel; (iii) $3 \le b < c \le 6$ feltételek mindegyikét?

A) 10 *B)* 18 *C)* 24 *D)* 36 *E)* 48

12. Legyen f egy lineáris függvény, amire

$$f(1) \le f(2),\ f(3) \ge f(4) \text{ és } f(5) = 5$$

teljesül. A következő állítások közül melyik igaz?

A) $f(0) < 0$
B) $f(0) = 0$
C) $f(1) < f(0) < f(-1)$
D) $f(0) = 5$
E) $f(0) > 5$

13. Az alábbi összeadás hibás, de kijavítható oly módon, hogy valamely d számjegy helyett – annak minden előfordulásakor – egy e számjegyet írunk. Meghatározandó d és e összege.

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +\,829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

A) 4 *B)* 6 *C)* 8 *D)* 10 *E)* több mint 10

14. Ha $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ és $f(-3) = 2$, akkor $f(3) =$

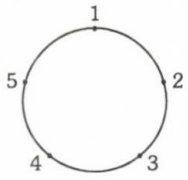
A) -5 *B)* -2 *C)* -1 *D)* 3 *E)* 8

15. Egy körvonalon öt pontot megjelöltünk az óramutató járása szerinti sorrendben az 1, 2, 3, 4 és 5 számokkal. Egy bolha az óramutató járásának irányában haladva ugrál a megjelölt pontokon; ha páratlan számmal megjelölt ponton áll, akkor egy ponttal ugrik tovább, ha pedig páros számmal megjelölt ponton áll, akkor két ponttal ugrik tovább. Ha a bolha az 5-ös

pontról indul, akkor 1995 ugrás után a(z)

A) 1-es
B) 2-es
C) 3-as
D) 4-es
E) 5-ös

ponton fog állni.



16. Anita elmegy egy baseball meccsre Atlantába, ahol becslése szerint 50 000 szurkoló tekinti meg a mérkőzést. Bob is kimegy egy baseball meccsre Bostonba, ahol a nézők számát 60 000-re saccolja. A liga egy tisztviselője, aki ismeri a tényleges nézőszámokat, megállapítja a következőket:

(*i*) A tényleges nézőszám Atlantában legfeljebb 10%-kal tér el az Anita által adott becsléstől.

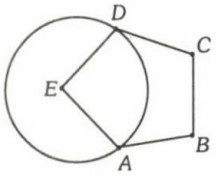
(*ii*) Bob becslése legfeljebb 10%-kal tér el a tényleges bostoni nézőszámtól.

A két meccs nézőszáma közti lehetséges legnagyobb eltérés – szabályos 1000-es kerekítéssel –

A) 10 000
B) 11 000
C) 20 000
D) 21 000
E) 22 000

17. Egy szabályos *ABCDE* ötszöghöz szerkeszthető egy olyan körvonal, amelyik érinti a $\overline{DC}$ egyenest a *D* pontban és az $\overline{AB}$ egyenest az *A* pontban. Hány fokos a kisebbik *AD* körív?

A) 72
B) 108
C) 120
D) 135
E) 144

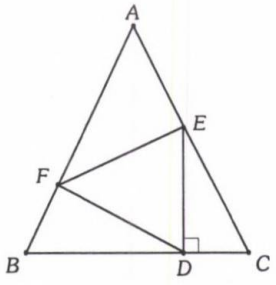


18. Az *O* pontból kiinduló két félegyenes 30°-os szöget zár be egymással. Az *A* pont az egyik félegyenesen fekszik, a *B* pont pedig a másikon, úgy, hogy $AB = 1$. Az *OB* szakasz lehetséges legnagyobb hosszúsága

A) 1 *B)* $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ *C)* $\sqrt{3}$ *D)* 2 *E)* $\frac{4}{\sqrt{3}}$

19. Az *ABC* egyenlő oldalú háromszögbe beírtunk egy *DEF* egyenlő oldalú háromszöget az ábrán látható módon úgy, hogy $\overline{DE} \perp \overline{BC}$. A *DEF* háromszög és az *ABC* háromszög területének aránya

A) $\frac{1}{6}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{5}$
E) $\frac{1}{2}$



20. Ha az *a*, *b* és *c* (nem feltétlenül különböző) számokat véletlenszerűen választottuk az {1, 2, 3, 4, 5} halmazból, akkor annak a valószínűsége, hogy $ab+c$ páros, pontosan

A) $\frac{2}{5}$ *B)* $\frac{59}{125}$ *C)* $\frac{1}{2}$ *D)* $\frac{64}{125}$ *E)* $\frac{3}{5}$

21. Egy téglalap két átellenes csúcsa a (4; 3) és a (– 4; – 3) pont, továbbá a többi csúcsának koordinátái is egész számok. Az ilyen téglalapok száma

A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* 5

22. Egy ötszöget készítünk úgy, hogy egy téglalap alakú papírból levágunk egy háromszög alakú sarkot. Az ötszög öt oldalának hossza – nem feltétlenül körüljárási sorrendben – 13, 19, 20, 25 és 31. Az ötszög területe

A) 459 *B)* 600 *C)* 680 *D)* 720 *E)* 745

23. Egy háromszög három oldala 11, 15, illetve *k* hosszúságú, ahol *k* egész szám. Hány

darab olyan értéke lehet k-nak, amire a háromszög tompaszögű?

A) 5 *B)* 7 *C)* 12 *D)* 13 *E)* 14

24. Léteznek A, B és C relatív prím pozitív egészek úgy, hogy $A \log_{200} 5 + B \log_{200} 2 = C$.
Mennyi $A+B+C$?

A) 6 *B)* 7 *C)* 8 *D)* 9 *E)* 10

25. Egy öttagú, pozitív egészekből álló számsor számtani közepe 12, a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége 18, a számsor módusza (e számsorban leggyakrabban előforduló szám) és mediánja (e számok elemeit nagysága szerint rendezve, a középső elem) egyaránt 8. A számsorban előforduló második legnagyobb elem hány darab különböző értéket vehet fel?

A) 4 *B)* 6 *C)* 8 *D)* 10 *E)* 12

26. Az ábrán az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok az O középpontú kör átmérői úgy, hogy $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, és a $\overline{DF}$ húr az $\overline{AB}$ egyenest az E pontban metszi. Ha $DE = 6$ és $EF = 2$, akkor a kör területe

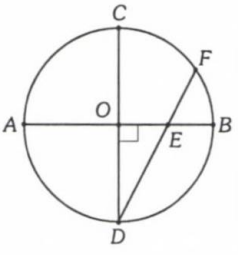
A) 23π

B) $\frac{47}{2}\pi$

C) 24π

D) $\frac{49}{2}\pi$

E) 25π



27. Tekintsük számoknak egy olyan háromszögletű elrendezését, ahol a sorok szélein rendre a 0, 1, 2, 3,... számok állnak, a közbülső elemeket pedig az előző sor szomszédos elemeinek összeadásával kapjuk. Az első hat sort láthatjuk az alábbi ábrán:

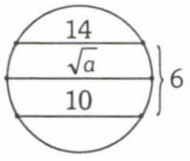
0
1 1
2 2 2
3 4 4 3
4 7 8 7 4
5 11 15 15 11 5

Jelölje $f(n)$ az n-edik sorban álló számok összegét. Mennyi a maradék akkor, ha az $f(100)$-at 100-zal osztjuk?

A) 12 *B)* 30 *C)* 50 *D)* 62 *E)* 74

28. Egy kör két párhuzamos húrja 10, illetve 14 egység hosszúságú, egymástól mért távolságuk 6 egység. A kör ezen két húrral párhuzamos, tőlük egyenlő távolságra lévő húrjának hossza $\sqrt{a}$, ahol $a =$

A) 144
B) 156
C) 168
D) 176
E) 184

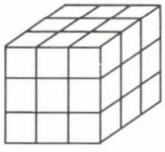


29. Hány darab háromelemű, pozitív egészekből álló $\{a, b, c\}$ halmazra teljesül, hogy $a \cdot b \cdot c = 2310$?

A) 32 *B)* 36 *C)* 40 *D)* 43 *E)* 45

30. Egy nagy kockát 27 egységkockából ragasztottunk össze. Egy sík merőlegesen felezi a nagy kocka egyik testátlóját. Ezen sík által metszett egységkockák száma

A) 16
B) 17
C) 18
D) 19
E) 20



A megoldási kulcs:

B–D–B–B–C–C–C–C–D–E–C–D–C–E–D–E–E–D–C–B–E–E–D–A–B–C–E–E–C–D.

Megjegyzések:

1. A 16. feladat okozott problémát, a szövegét félreértették a tanulók.

2. A 30. feladat megoldása nagyon leegyszerűsíthető abban az esetben, ha a versenyző ismeri a kocka szabályos hatszög metszetét.

3. A 20. feladat megoldása: $(ab+c)$ páros, ha ab is, c is páros, vagy ha mindkettő páratlan. ab páratlan, ha a is és b is páratlan. Így annak a valószínűsége, hogy ab páratlan:

$$\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

Annak a valószínűsége, hogy ab páros:

$$1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

A keresett valószínűség:

$$\frac{16}{25}\cdot\frac{2}{5}+\frac{9}{25}\cdot\frac{3}{5}=\frac{59}{125}$$

Az 1996. évi AHSME feladatai

1. Az alábbi összeadás hibás. Melyik az a legnagyobb számjegy, amelynek a megváltoztatásával az összeadás helyessé tehető?

$$\begin{array}{r} 6\,4\,1 \\ 8\,5\,2 \\ +\,9\,7\,3 \\ \hline 2\,4\,5\,6 \end{array}$$

A) 4 *B)* 5 *C)* 6 *D)* 7 *E)* 8

2. Walter mindennap 3 dollárt kap a munkájáért, vagy 5 dollárt, ha azt különösen jól végzi. Tíz napi munka után összesen 36 dollárt kapott. Hány napon végezte Walter különösen jól a munkáját?

A) 3 *B)* 4 *C)* 5 *D)* 6 *E)* 7

3. $\dfrac{(3!)!}{3!}=$

A) 1 *B)* 2 *C)* 6 *D)* 40 *E)* 120

4. Egy listára kilenc egész számot írtak fel, ezek közül a következő hatot ismerjük: 7, 8, 3, 5, 9 és 5. A kilenc szám mediánjának (a kilenc számot nagyság szerint rendezve az ötödik számnak) lehetséges legnagyobb értéke

A) 5 *B)* 6 *C)* 7 *D)* 8 *E)* 9

5. Feltéve, hogy $0 < a < b < c < d$, a következő törtek közül melyik a legnagyobb?

A) $\dfrac{a+b}{c+d}$ *B)* $\dfrac{a+d}{b+c}$ *C)* $\dfrac{b+c}{a+d}$ *D)* $\dfrac{b+d}{a+c}$ *E)* $\dfrac{c+d}{a+b}$

6. Ha $f(x) = x^{(x+1)}\,(x+2)^{(x+3)}$, akkor $f(0)+f(-1)+f(-2)+f(-3) =$

A) $-8/9$ *B)* 0 *C)* 8/9 *D)* 1 *E)* 10/9

7. Egy apa vendéglőbe viszi vacsorázni két ikergyermekét a születésnapjukon; velük tart az ikrek öccse is. Az étteremben 4,95 dollárt kell fizetni az apa vacsorájáért, egy-egy gyermeke vacsorájáért pedig a gyerek minden betöltött életéve után 0,45 dollárt kell fizetni. Ha a számla végösszege 9,45 dollár, mennyi az ikrek öccsének életkora (betöltött életéveinek száma)?

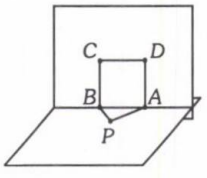
A) 1 *B)* 2 *C)* 3 *D)* 4 *E)* 5

8. Ha $3 = k \cdot 2^r$ és $15 = k \cdot 4^r$, akkor $r =$

A) $-\log_2 5$ *B)* $\log_5 2$ *C)* $\log_{10} 5$ *D)* $\log_2 5$ *E)* $\dfrac{5}{2}$

9. A PAB háromszög és az $ABCD$ négyzet egymásra merőleges síkokra illeszkednek. Feltéve, hogy $PA = 3$, $PB = 4$ és $AB = 5$, mekkora a PD távolság?

A) 5
B) $\sqrt{34}$
C) $\sqrt{41}$
D) $2\sqrt{13}$
E) 8



10. Hány olyan szakasz létezik, amelynek mindkét végpontja egy adott kocka valamely csúcsában van?

A) 12 *B)* 15 *C)* 24 *D)* 28 *E)* 56

11. Egy adott 2 egység sugarú körhöz sok olyan 2 egység hosszúságú szakasz található, amelyek felezőpontjukban érintik az adott kört. Meghatározandó annak a tartománynak a területe, amelyet az összes ilyen szakasz egyesítése alkot.

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $4-\pi$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) π E) 2π

12. Egy, az egész számok halmazán értelmezett egész értékű f függvényt az

$$f(n)=\begin{cases} n+3, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ n/2, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

képlettel adtunk meg. Tegyük fel, hogy k páratlan és $f(f(f(k))) = 27$.

Mennyi a k számjegyeinek összege?

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

13. Sugár egyenletes tempóban vágtázik, Mandula pedig m-szer olyan gyorsan, ahol m egy 1-nél nagyobb szám. Ha Mandula h méter előnyt ad Sugárnak, hány métert kell Mandulának megtennie, amíg utoléri Sugárt?

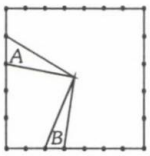
A) hm B) $\frac{h}{h+m}$ C) $\frac{h}{m-1}$ D) $\frac{hm}{m-1}$ E) $\frac{h+m}{m-1}$

14. Jelölje $E(n)$ az n páros számjegyeinek összegét. Például $E(5681) = 6+8 = 14$. Meghatározandó $E(1)+E(2)+E(3)+\ldots+E(100)$.

A) 200 B) 360 C) 400 D) 900 E) 2250

15. Egy téglalap két szemközti oldalát egyaránt n egyenlő részre osztottuk, és két szomszédos osztópontot összekötöttünk a téglalap középpontjával, így kaptuk az A háromszöget. A másik két oldalt egyaránt m egyenlő részre osztottuk, és két szomszédos osztópontot összekötöttünk a téglalap középpontjával, így kaptuk a B háromszöget. [Az ábra az $n = 5$, $m = 7$ esetet szemlélteti.] Hányszorosa az A háromszög területe a B háromszög területének?

A) 1
B) m/n
C) n/m
D) $2m/n$
E) $2n/m$

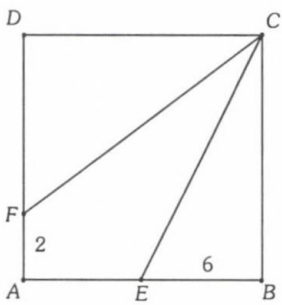


16. Egy szabályos dobókockát háromszor feldobunk. Ha tudjuk, hogy az első két dobott szám összege megegyezik a harmadik dobás eredményével, mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egyszer 2-est dobtunk?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{91}{216}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{8}{15}$ E) $\frac{7}{12}$

17. Az $ABCD$ téglalapban a $\overline{CF}$ és $\overline{CE}$ egyenesek harmadolják a téglalap C csúcsánál lévő belső szögét, ahol az E pont az $\overline{AB}$ szakaszra, az F pont pedig az $\overline{AD}$ szakaszra esik, $BE = 6$ és $AF = 2$. A következő számok közül melyik van legközelebb az $ABCD$ téglalap területének mérőszámához?

A) 110
B) 120
C) 130
D) 140
E) 150

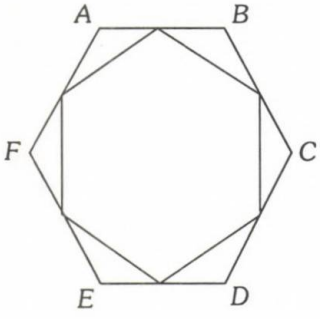


18. Egy 2 egység sugarú kör középpontjának koordinátái (2; 0). Egy 1 egység sugarú kör középpontjának koordinátái (5; 0). Egy egyenes mindkét kört érinti az első síknegyedben. A következő számok közül melyik van legközelebb az egyenes és az y-tengely metszetének ordinátájához?

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $1+\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 3

19. Az *ABCDEF* szabályos hatszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötve egy kisebb hatszöget kapunk. Az *ABCDEF* hatszög területének hányadrésze esik a kis hatszögbe?

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{4}$
E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

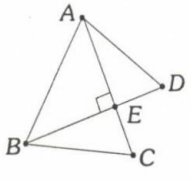


20. Az *xy*-síkban mennyi annak a legrövidebb útnak a hossza, amelyik a (0; 0) pontot köti össze a (12; 16) ponttal és nem halad át az $(x-6)^2+(y-8)^2 = 25$ egyenletű kör belsején?

A) $10\sqrt{3}$ *B)* $10\sqrt{5}$ *C)* $10\sqrt{3}+\frac{5\pi}{3}$
D) $40\frac{\sqrt{3}}{2}$ *E)* $10+5\pi$

21. Az *ABC* és az *ABD* háromszögek egyenlőszárúak úgy, hogy $AB = AC = BD$, továbbá a $\overline{BD}$ szakasz metszi az $\overline{AC}$ szakaszt az *E* pontban. Ha $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, akkor a *C* és *D* csúcsoknál lévő szögek összege

A) 115°
B) 120°
C) 130°
D) 135°
E) nem egyértelműen meghatározott



22. Egy szabályos 1996-szög csúcspontjai közül kell kiválasztanunk négy különbözőt, az *A*, *B*, *C* és *D* pontokat. Minden pont-négyest egyforma valószínűséggel választunk ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az $\overline{AB}$ húr metszi a $\overline{CD}$ húrt?

A) $\frac{1}{4}$ *B)* $\frac{1}{3}$ *C)* $\frac{1}{2}$ *D)* $\frac{2}{3}$ *E)* $\frac{3}{4}$

23. Egy téglatest alakú doboz tizenkét élének összhossza 140, és a doboz egy sarkának a tőle legtávolabb eső saroktól mért távolsága 21. Ekkor a doboz felszíne

A) 776 *B)* 784 *C)* 798 *D)* 800 *E)* 812

24. Az 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2,... sorozat csupa 2-eseket tartalmazó blokkokból és az azokat elválasztó 1-esekből áll úgy, hogy az *n*-edik blokkban *n* darab 2-es van. Ezen sorozat első 1234 tagjának összege

A) 1996 *B)* 2419 *C)* 2429 *D)* 2439 *E)* 2449

25. Feltéve, hogy $x^2+y^2 = 14x+6y+6$, legfeljebb mennyi lehet $3x+4y$ értéke?

A) 72 *B)* 73 *C)* 74 *D)* 75 *E)* 76

26. Egy urnában piros, fehér, kék és zöld golyók vannak. Ha véletlenszerűen, visszatevés nélkül kihúzunk négy golyót, a következő események egyenlő valószínűségűek:

a) négy piros golyót húztunk ki;

b) egy fehér és három piros golyót húztunk ki;

c) egy fehér, egy kék és két piros golyót húztunk ki;

d) mind a négy színből egy-egy golyót húztunk ki.

Legalább hány golyó volt az urnában?

A) 19 *B)* 21 *C)* 46 *D)* 69 *E)* több, mint 69

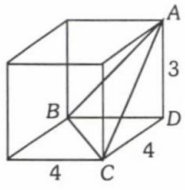
27. Tekintsünk két gömböt (a belsejükkel együtt), az egyiknek a középpontja $(0; 0; \frac{21}{2})$ és a sugara 6, a másiknak pedig a középpontja (0; 0; 1) és a sugara $\frac{9}{2}$. Hány darab csupa egész

koordinátájú $(x; y; z)$ pont (rácspont) van a két gömb metszetében?

A) 7 *B)* 9 *C)* 11 *D)* 13 *E)* 15

28. Egy $4 \cdot 4 \cdot 3$-as téglatest D csúcsával szomszédos csúcsai A, B és C. A következő számok közül melyik esik legközelebb a D csúcsnak az A, B és C pontok által kifeszített síktól mért távolságához?

A) 1,6
B) 1,9
C) 2,1
D) 2,7
E) 2,9



29. Ha n egy pozitív egész úgy, hogy $2n$ pozitív osztóinak száma 28, $3n$ pozitív osztóinak száma pedig 30, akkor hány pozitív osztója van $6n$-nek?

A) 32 *B)* 34 *C)* 35 *D)* 36 *E)* 38

30. Egy körbe írt hatszög három egymást követő oldalának hossza 3 és a másik három egymást követő oldalának hossza pedig 5. A kör egy húrja a hatszöget két trapézra osztja, melyek közül az egyiknek három oldala egyaránt 3, a másiknak három oldala egyaránt 5 egység hosszúságú; ennek a húrnak a hossza m/n, ahol m és n relatív prím pozitív egészek. Meghatározandó $m+n$.

A) 309 *B)* 349 *C)* 369 *D)* 389 *E)* 409

A megoldási kulcs:

D–A–E–D–E–E–B–D–B–D–D–B–D–C–B–D –E–D–D–C–D–B–B–B–B–B–D–C–C–E.

Megjegyzések:

1. A 7. feladatnál a szöveg értelmezése okozott problémát.
2. Ez a sorozat is használja a medián fogalmát.
3. Valószínűségszámítási feladatokat is kitűztek. Nehezen ment a megoldásuk.
4. A 9. feladatban a $PB = 4$ érték felesleges.
5. Térbeli koordinátarendszer ismerete is szükségesek.
6. A 16. feladat megoldása:

15-féleképpen jöhet ki, hogy a 3. dobás eredménye az első két dobott szám összegével egyezik meg.

$\boxed{(1, 1, 2)}$, $\boxed{(1, 2, 3)}$, (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), $\boxed{(2, 1, 3)}$, $\boxed{(2, 2, 4)}$, $\boxed{(2, 3, 5)}$, $\boxed{(2, 4, 6)}$, (3, 1, 4), $\boxed{(3, 2, 5)}$, (3, 3, 6), (4, 1, 5), $\boxed{(4, 2, 6)}$, (5, 1, 6).

Mivel a 3 dobás egymástól független, így mind a 15 kimenetel egyenlően valószínű. Egy 2-est 8 esetben kapunk. Így a keresett valószínűség: $\frac{8}{15}$.

A 16. feladat a feltételes valószínűség fogalmának az ismeretében is megoldható.

Legyen:

A: {legalább 1 db 2-es}
B: $\{\zeta_1+\zeta_2 = \zeta_3\}$
C: $\{\zeta_3 = k\}$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\sum_{k=1}^{6} P(ABC_k)}{\sum_{k=1}^{6} P(BC_k)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{6} P(AB/C_k)P(C_k)}{\sum_{k=1}^{6} P(BC/C_k)P(C_k)} =$$

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{36}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{36}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{36}}{\frac{1}{6}\left(0+\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}\right)}=$$

$$=\frac{1+2+1+2+2}{1+2+3+4+5}=\frac{8}{15}.$$

7. A 22. feladat megoldása:

Mivel minden pontnégyes kiválasztása egyenlően valószínű, így csak azt az esetet kell vizsgálnunk, amikor a 4 pont pl. az óramutató járásával megegyező sorrendben helyezkedik el, ezek a következők:

ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB.

Közülük csak az *ACBD, ADBC* pontnégyes felel meg a feltételeknek, mert csak ez az elrendezés biztosítja a metszési feltételt.

Így a keresett valószínűség: $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

8. A 26. feladat megoldása:

Jelölje *r, w, b, g* rendre a piros, a fehér, a kék, a zöld golyók számát és legyen

$$n = r+w+b+g.$$

Az egyenlően valószínű eseményekre érvényes, hogy

$$\frac{\binom{r}{4}}{\binom{n}{4}}=\frac{\binom{r}{3}\binom{w}{1}}{\binom{n}{4}}=\frac{\binom{r}{2}\binom{w}{1}\binom{b}{1}}{\binom{n}{4}}=\frac{\binom{r}{1}\binom{w}{1}\binom{b}{1}\binom{g}{1}}{\binom{n}{4}}$$

Ezután r-et *w, b, g* segítségével kifejezzük:

$$r-3=4w,\ r-2=3b,\ r-1=2g.$$

A legkisebb *r* érték, amely esetén *w, b, g* pozitív egész az $r=11$, ekkor $w=2$, $b=3$, $g=5$.

A golyók minimális száma: $11+2+3+5=21$.

Dr. Gerőcs László

A generátorfüggvény alkalmazása Fibonacci-szerű sorozatok vizsgálatánál

Jelen cikkben a generátorfüggvény-elvet fogjuk alkalmazni a Fibonacci-sorozat általánosításaként szereplő *k*-adrendű lineáris rekurzív sorozatokra. A generátorfüggvény segítségével megmutatjuk, hogy bármely bizonyos feltételeknek eleget tevő racionális törtfüggvény tekinthető valamely lineáris rekurzív sorozat generátorfüggvényének, és megvizsgáljuk, hogy e függvény segítségével hogyan lehet magasabb rendű lineáris rekurzív sorozatokat alacsonyabb rendű ilyen sorozatok összegére felbontani.

Generátorfüggvény-elven a következőt értjük: adott egy $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – véges vagy végtelen – számsorozat. E sorozat vizsgálata céljából a sorozathoz rendelünk egy alkalmasan választott *f* függvényt (ezt fogjuk a kérdéses sorozat generátorfüggvényének nevezni), majd analitikai eszközökkel megvizsgáljuk az *f* függvényt, s a nyert információkból megpróbálunk következtetéseket levonni az eredeti sorozat tulajdonságairól.

Ezek után vizsgálódásainkat kezdjük a Fibonacci-sorozat általánosításával. Ezt az álta-

lánosítást többféleképpen, több szinten is megtehetjük.

D.1. *k*-adrendű Fibonacci-sorozatnak nevezzük az

$$F_0^{(k)} = F_1^{(k)} = \ldots\ldots\ldots = F_{k-1}^{(k)} = 1$$

kezdőelemekkel és az

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)} + \ldots\ldots + = F_{n-k}^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} F_{n-i}^{(k)} \qquad (n \geq k)$$

rekurzióval definiált sorozatot. (A klaszszikus Fibonacci-sorozatot – amikor is $k = 2$ – megkülönböztetésül f_n-nel fogjuk jelölni.)

Ha D.1.-ben az első *k* db elem nem csupa egyes, hanem

$$F_0 = A_0, F_1 = A_1 \ldots, F_{k-1} = A_{k-1}$$

ahol A_i-k egész számok és nem mind zérus, akkor a sorozatot *k*-adrendű Fibonacci-szerű sorozatnak nevezzük.

D.2. Gyakran használjuk az előbbieknél általánosabb $R_n^{(k)}$-val jelölt sorozatot

$$R_0^{(k)} = R_1^{(k)} = \ldots\ldots = R_{k-1}^{(k)} = 1 \quad \text{és} \quad n \geq k \quad \text{esetén}$$

$$R_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot R_{n-i}^{(k)},$$

ahol a_i-k adott egész számok és természetesen nem mindegyikük 0. (Nyilván, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$, akkor R_n sorozat azonos az F_n sorozattal.)

A Fibonacci-sorozat még erősebb általánosításához jutunk, ha a kezdőelemeket is megváltoztatjuk.

D.3. Legyenek $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}, a_1, a_2, \ldots, a_k$ tetszőleges adott egészek úgy, hogy nem minden A_i és nem minden a_j nulla. Ekkor $G_n^{(k)}$-val jelöljük a

$$G_0^{(k)} = A_0, G_1^{(k)} = A_1, \ldots, G_{k-1}^{(k)} = A_{k-1}$$

kezdőelemekkel és $n \geq k$ esetén a

$$G_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} a_1 \cdot G_{n-i}^{(k)}$$

rekurzióval definiált sorozatot.
(Bizonyára nem okoz semmiféle félreértést, ha a továbbiakban a kérdéses sorozat rendszámára utaló jobb felső (k) indexet – ha csak nem feltétlenül szükséges – elhagyjuk.)

A továbbiakban – bemelegítésként – állítsuk elő a Fibonacci-sorozat generátorfüggvényét. Ehhez legelőször írjuk fel az x változó és az f_n Fibonacci-sorozat elemeivel meghatározott hatványsort és vizsgáljuk meg, milyen x-ekre lesz ez a hatványsor konvergens, majd állítsuk elő e hatványsor összegét, amelyet a Fibonacci-sorozat generátorfüggvényének fogunk nevezni. Mivel

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} < 2f_{n-1} < 2^2 f_{n-2} < \ldots < 2^n f_0 = 2^n,$$

ezért

$$f_n x^n < 2^n x^n = (2x)^n,$$

De $(2x)^n$ egy geometriai sor, amely $|2x| < 1$, vagyis $|x| < \frac{1}{2}$ esetén konvergens.

Jelöljük az összegfüggvényt $f(x)$-szel:

$$f(x) = f_0 + f_1 + f_2 x^2 + \ldots + f_n x^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} f_i x^i \quad (1)$$

Most szorozzuk meg az (1) egyenlőség mindkét oldalát $-x$-szel, majd $-x^2$-tel:

$$-xf(x) = f_0 x - f_1 x^2 - f_2 x^3 - \ldots - f_{n-1} x^n - \ldots \quad (2)$$

$$-x^2 f(x) = f_0 x^2 - f_1 x^3 - f_2 x^4 - \ldots - f_{n-2} x^n - \ldots \quad (3)$$

Adjuk össze (1), (2) és (3) egyenlőségeket, kapjuk:

$$f(x)\,(1 - x - x^2) = f_0 + x(f_1 - f_0) + x^2\,(f_2 - f_1 - f_0) + \ldots$$
$$\ldots + x^n (f_n - f_{n-1} - f_{n-2}) + \ldots$$

Mivel f_n definíciója miatt $k \geq 2$ esetén $f_k - f_{k-1} - f_{k-2} = 0$, továbbá $f_1 - f_0 = 0$, ezért a kapott egyenlőség jobb oldalán az első tag kivételével minden tag 0. Mivel $f_0 = 1$, így kapjuk a Fibonacci-sorozat $f(x)$ generátorfüggvényét:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Eztán a generátorfüggvény alkalmas átalakításával – a nevező gyökeinek meghatározása után parciális törtekre bontva – már könnyen megkaphatjuk az f_n sorozat elemeinek explicit alakját.

A továbbiakban előállítjuk – a Fibonacci-sorozathoz hasonlóan – a **D.3.**-ban definiált általános $G_n^{(k)}$ k-adrendű lineáris rekurzív sorozat generátorfüggvényét. Mint látni fogjuk, ez minden esetben egy racionális törtfüggvény, melynek nevezőjében levő polinom gyökeinek ismeretében könnyen meghatározhatjuk a kérdéses sorozat elemeinek explicit alakját. Az előállítandó generátorfüggvényt tovább elemezve az is ki fog derülni, hogyan bonthatunk fel egy k-adrendű lineáris rekurzív sorozatot alacsonyabb rendű ugyanilyen sorozatok összegére.

Legelőször azt vizsgáljuk meg, hogy az általános $G_n^{(k)}$ sorozat elemeiből alkotott

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n \qquad (4)$$

hatványsor mely x valós számok esetén lesz konvergens

Legyen adott tehát a $G_n^{(k)}$:

$$G_0 = A_0,\ G_1 = A_1,\ \ldots,\ G_{k-1} = A_{k-1} \text{ és}$$
$$G_n = \sum_{i=1}^{\kappa} a_i G_{n-i} \qquad (n \geq k),$$

ahol a_i-k egészek és nem mind 0. Válasszuk ki az A_i kezdőelemek és az a_j együtthatók közül a legnagyobb abszolútértékűeket; legyenek ezek A^* és a^*:

$$\max(|A_0|, |A_1|, \ldots |A_{k-1}|) = A^*,$$
$$\max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|) = a^*.$$

Tekintsük az alábbi $M_n^{(k)}$ k-adrendű sorozatot:

$M_0 = M_1 = \ldots = M_{k-1} = A^*$ és $n \geq k$ esetén

$$M_n = \sum_{i=1}^{k} a^* M_{n-i}.$$

Nyilvánvaló, hogy az $M_n^{(k)}$ sorozat pozitív tagú, monoton növekvő, 0-t nem tartalmazó sorozat, és minden n-re

$$M_n^{(k)} \geq \left|G_n^{(k)}\right|$$

Az $M_n^{(k)}$ sorozatra

$$M_n < ka^* M_{n-1} < (ka^*)^2 M_{n-2} < (ka^*)^3 M_{n-3} < \ldots$$
$$< (ka^*)^n M_0,$$

így

$$M_n x^n < M_0 (ka^* x)^n.$$

De $M_0(ka^*x)^n$ egy mértani sor, amelynek hányadosa ka^*x. Ha e hányadosra $|ka^*x| < 1$, akkor e mértani sor konvergens. Azt kaptuk, hogy

$$|x| < \frac{1}{ka^*}$$

esetén az $\sum_{n=0}^{\infty} M_n x^n$ hatványsor konvergens.

Mivel minden n-re $|G_n| \leq M_n$, ezért $|x| < \frac{1}{ka^*}$ esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n$$

sor is konvergens.

Most előállítjuk (4) hatványsor generátorfüggvényét.

T.1. A **D.3.**-ban definiált $G_n^{(k)}$ sorozat elemeiből alkotott

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n$$

hatványsor generátorfüggvénye:

$$G(x)\ \frac{A_0 + \sum_{j=1}^{k-1} x^j \left(A_j - \sum_{i=1}^{j} a_i A_{j-i} \right)}{1 - \sum_{r=1}^{k} a_r x^r}$$

Bizonyítás

$$G(x) = G_0 + G_1 x + G_2 x^2 + \ldots + G_k x^k + \ldots + G_n x^n + \ldots \qquad (5)$$

Szorozzuk meg (5)-öt rendre

$a_1 x$, $a_2 x^2$, $a_3 x^3$,..., $a_k x^k$-nal:

$$a_1 x G(x) = a_1 G_0 x + a_1 G_1 x^2 + a_1 G_2 x^3 + \ldots + a_1 G_{k-1} x^k + \ldots + a_1 G_{n-1} x^n + \ldots +$$

$$a_2 x^2 G(x) = a_2 G_0 x^2 + a_2 G_1 x^3 + \ldots + a_2 G_{k-2} x^k + \ldots + a_2 G_{n-2} x^n + \ldots \qquad (6)$$

$$\vdots$$

$$a_k x^k G(x) = a_k G_0 x^k + \ldots + a_k G_{n-k} x^n + \ldots.$$

Most vonjuk ki (5)-ből a (6)-ban szereplő k db egyenlőséget; kapjuk:

$$G(x)(1 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \ldots - a_k x^k) =$$
$$= G_0 + x(G_1 - a_1 G_0) + x^2(G_2 - a_1 G_1 - a_2 G_0) + \ldots +$$
$$+ x^{k-1}(G_{k-1} - a_1 G_{k-2} - a_2 G_{k-3} - \ldots - a_{k-1} G_0) + \ldots +$$
$$+ x^k(G_k - a_1 G_{k-1} - a_2 G_{k-2} - \ldots - a_k G_0) + \ldots +$$
$$+ x^n(G_n - a_1 G_{n-1} - a_2 G_{n-2} - \ldots - a_k G_{n-k}) + \ldots \qquad (7)$$

Azonban a $G_n^{(k)}$ sorozat definíciója szerint minden $i > k$-ra:

$$G_i - a_1 G_{i-1} - a_2 G_{i-2} - \ldots a_k G_{i-k} = 0,$$

ezért x^k és minden további tag együtthatója zérus. Az utolsó megmaradó tag:

$$x^{k-1}(G_{k-1} - a_1 G_{k-2} - \ldots a_2 G_{k-3} - \ldots - a_{k-1} G_0).$$

Ezt figyelembe véve (7) egyenlőség a következőképpen alakul:

$$G(x)(1 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \ldots - a_k x^k) =$$
$$= G_0 + x(G_1 - a_1 G_0) + x^2(G_2 - a_1 G_1 - G_2 G_0) + \ldots +$$
$$+ x^{k-1}(G_{k-1} - a_1 G_{k-2} - a_2 G_{k-3} - \ldots - a_{k-1} G_0) =$$
$$G_0 \sum_{j=1}^{k-1} x_j \left(G_j - \sum_{i=1}^{j} a_i G_{j-i} \right)$$

Mivel $j < k$ esetén $G_j = A_j$, így azt kaptuk:

$$G(x)\left(1 - \sum_{i=1}^{k} a_i x^i\right) = G_0 + \sum_{j=1}^{k-1} x_j \left(G_j - \sum_{i=1}^{j} a_i G_{j-i} \right),$$

azaz

$$G(x) = \frac{A_0 + \sum_{j=1}^{k-1} x^j \left(A_j - \sum_{i=1}^{j} a_1 A_{j-i} \right)}{1 - \sum_{r=1}^{k} a_r x^r} \qquad (8)$$

A most kapott generátorfüggvény segítségével a $G_n^{(k)}$ sorozat elemeinek egy új előállítási módját adjuk meg.

T.2. *Jelöljük* a $G_n^{(k)}$ sorozat $G(x)$ generátorfüggvény kifejezésében lévő

$$\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{k} a_r x^r}$$

tényezőt $h(x)$-szel. *Legyen továbbá*

$$c_0 = A_0 \text{ és } c_j = A_j - \sum_{i=1}^{j} a_i A_{j-i} \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Ekkor a $G_n^{(k)}$ sorozat elemei $n \geq k$ esetén

$$G_n = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{c_1}{(n-1)!} \cdot h^{(n-i)}(0) \qquad (9)$$

alakban adhatók meg, ahol $h^{(n-i)}(0)$ a $h(x)$ függvény $(n-i)$-edik deriváltját jelenti az $x = 0$ helyen.

Bizonyítás

A $G_n^{(k)}$ sorozat $G(x)$ generátorfüggvényét a **T.1.**-ben megadtuk. $G(x)$ hatványsorának a bevezetőben említett tulajdonságai alapján

$$G_n = \frac{1}{n!}G^{(n)}(0). \qquad (10)$$

Jelöljük a $G(x)$ generátorfüggvény kifejezésének számlálójában szereplő összeget $f(x)$-szel:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k}\left(A_j - \sum_{i=0}^{j} a_i A_{j-i}\right)x^j = \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^j .$$

Ekkor $G(x) = f(x) \cdot h(x)$.

Most alkalmazzuk a szorzatfüggvényekre, illetve ezek magasabb deriváltjaira vonatkozó ún. **Leibniz-szabályt** – ennek igazolását az olvasó megtalálja bármely analízis tankönyvben –, amely szerint

$$G^{(n)}(x) = \left[f(x)\cdot h(x)\right]^{(n)} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} f^{(i)}(x)\cdot h^{(n-i)}(x), \qquad (11)$$

ahol a jobb felső index az n-edik, az i-edik, illetve az $(n-i)$-edik deriváltat jelenti.

Itt f deriváltja az $x = 0$ helyen könnyen meghatározhatjuk:

$f^{(0)}(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2c_2, \ldots, f^{(i)}(0) = i!c_i$, ha $0 \le i < k$, és $f^{(i)}(0) = 0$, ha $i \ge k$, ugyanis az $f(x)$ $k-1$-edfokú. Így $n \ge k$ esetén (9), (10) és (11) alapján

$$G_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} i!c_i h^{(n-i)}(0) =$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}h^{(n-i)}(0)i!c_i = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{c_i}{(n-i)!}h^{(n-i)}(0)$$

Ezzel a **T.2.** tételt igazoltuk.

Láttuk, hogy a $G_n^{(k)}$ sorozat generátorfüggvénye egy olyan racionális törtfüggvény, amelynek nevezője k-adfokú, számlálója pedig k-nál alacsonyabb fokú polinom. Vajon igaz-e, hogy egy ilyen racionális törtfüggvény mindig tekinthető egy rekurzív sorozat generátorfüggvényének?

Tekintsük például az

$$x \mapsto \frac{1-2x+x^2}{1+2x-3x^2+x^3} \qquad (12)$$

racionális törtfüggvényt és próbáljuk megtalálni – ha egyáltalán létezik – azt a rekurzív sorozatot, amelynek ez a generátorfüggvénye. Mindenesetre az biztos – (8)-t és (12)-t összehasonlítva –, hogy a kérdéses sorozat harmadrendű és

$$a_1 = -2,\ a_2 = 3,\ a_3 = -1.$$

Most hasonlítsuk össze a számlálókat:

$$A_0 = 1 \quad \text{és}$$

$$\sum_{j=1}^{2} x^j\left(A_j - \sum_{i=1}^{j} a_i A_{j-i}\right) =$$

$$= x(A_1 - a_1A_0) + x^2\left[A_2 - (a_1A_1 + a_2A_0)\right] =$$

$$= -2x + x^2$$

A megfelelő együtthatókat összevetve:

$$A_1 - a_1A_0 = -2 \text{ és } A_2 - (a_1A_1 + a_2A_0) = 1.$$

A helyettesítéseket elvégezve ezt kapjuk:

$$A_1 = -4 \text{ és } A_2 = 12.$$

Az a sejtésünk, hogy a (12) racionális törtfüggvény az alábbi harmadrendű sorozat generátorfüggvénye:

$$G_0 = 1,\ G_1 = -4,\ G_2 = 12 \text{ és } n \ge 3\text{-ra}$$

$$G_n = -2G_{n-1} + 3G_{n-2} - G_{n-3}. \qquad (13)$$

Ellenőrzésképpen készítsük el e sorozat generátorfüggvényét a **T.1.** tételben ismertetett módszer segítségével.

$$G(x)=\frac{A_0+\sum_{j=1}^{k-1}x^j\left(Aj-\sum_{i=1}^{j}a_iA_{j-i}\right)}{1-\sum_{r=1}^{k}a_rx^r}=$$

$$=\frac{1+x(A_1-a_1A_0)+x^2\left[A_2-(a_1A_1+a_2A_0)\right]}{1-\left(-2x+3x^2-x^3\right)}=$$

$$=\frac{1+x(-4+2)+x^2[12-(8+3)]}{1+2x-3x^2+x^3}=$$

$$=\frac{1-2x+x^2}{1+2x-3x^2+x^3}$$

Tehát a (12) racionális törtfüggvény valóban a (13) sorozat generátorfüggvénye.

Ezután bizonyíthatjuk az általános esetet.

T.3. *bármely racionális törtfüggvény, melynek számlálója alacsonyabb fokú, mint a nevezője, és a nevezőben levő konstans tag nem 0, tekinthető egy olyan lineáris rekurzív sorozat generátorfüggvényének, amelynek rendje megegyezik a nevezőben levő polinom fokszámával.*

Bizonyítás

Tekintsük az

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ \dots\ +a_jx^j}{c_0+c_1x+c_2x^2+\ \dots\ +c_kx^k} \qquad (14)$$

racionális függvényt, ahol $j < k$ és $c_0 \neq 0$.
A nevezőt és a számlálót c_0-lal osztva:

$$f(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ \dots\ +b_jx^j}{1-d_1x+d_2x^2+\ \dots\ +d_kx^k}$$

alakban írható, ahol $b_i=\frac{a_i}{c_0}$ és $d_i=-\frac{c_i}{c_0}$.

Definiáljunk egy $G_n^{(k)}$ k-adrendű sorozatot az alábbi módon:

$$G_0 = b_0,$$
$$G_1 = b_1+d_1b_0 = b_1+d_1G_0,$$
$$G_2 = b_2+d_1(b_1+d_1b_0)+ d_2b_0 =$$
$$=b_2+ d_1G_1+ d_2G_0, \qquad (15)$$
$$\vdots$$
$$G_{k-1} = b_{k-1}+d_1G_{k-2}+d_2G_{k-3}+\dots+d_{k-1}G_0.$$

és $n \geq k$ esetén

$$G_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}d_iG_{n-i}\,.$$

E sorozat generátorfüggvénye a **T.1.** tétel alapján a következő:

$$G(x)=\frac{G_0+\sum_{j=1}^{k-1}x^j\left(G_j-\sum_{i=1}^{j}d_iG_{j-i}\right)}{1-\sum_{i=1}^{k}d_ix^i}=$$

$$=\frac{G_0+x(G_1-d_1G_0)+x^2\left[G_2-(d_1G_1+d_2G_0)\right]}{1-\sum_{i=1}^{k}d^ix^i}+$$

$$+\ \dots\ .+\frac{x^{k-1}\left[G_{k-1}-(d_1G_{k-2}+\dots+d_{k-1}G_0)\right]}{1-\sum_{i=1}^{k}d_ix^i}$$

A (15) definíció megfelelő értékeit behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$G(x)=\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\ \dots\ +b_kx^k}{1-d_1x-d_2x^2-\ \dots\ -d_kx^k}$$

tehát a (14) törtfüggvény éppen a (15) $G_n^{(k)}$ sorozat generátorfüggvénye.

Végezetül azt vizsgáljuk meg, hogy két vagy több lineáris rekurzív sorozat összege milyen sorozat lesz. Erre jó lehetőséget ad a **T.3.** tétel, ugyanis az összeadandó sorozatok generátorfüggvényeivel el tudjuk végezni az összeadást, s az

eredményből már következtethetünk az összegszorzat kezdő elemeire, illetve együtthatóira. Elöljáróban nézzünk erre is egy konkrét esetet.

Legyen $K_n^{(2)}$ egy másodrendű sorozat, melyre

$$K_0 = 1, K_1 = 3 \text{ és } n \geq k \text{ esetén}$$
$$K_n = K_{n-1} + 2K_{n-2},$$

legyen továbbá $L_n^{(3)}$ harmadrendű sorozat, melyre

$$L_0 = 1, L_1 = 2, L_2 = 3 \text{ és } n \geq 3 \text{ esetén}$$
$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} + 2L_{n-3}.$$

Készítsük el a $K_n^{(2)}$ és az $L_n^{(3)}$ sorozatok $K(x)$ és $L(x)$ generátorfüggvényét. A **T.1.** tétel alapján:

$$K(x) = \frac{1+2x}{1-x-2x^2} \quad \text{és} \quad L(x) = \frac{1+x}{1-x-x^2-2x^3}$$

Adjuk össze e két racionális törtfüggvényt:

$$K(x) + L(x) = \frac{1+2x}{1-x-2x^2} + \frac{1+x}{1-x-x^2-2x^3}$$

Mivel a $K(x)$ nevezőjében levő polinom gyökei $\left(x=-1 \text{ és } x=\frac{1}{2}\right)$ közül $x=\frac{1}{2}$ az $L(x)$ nevezőjében levő polinomnak is gyöke, ezért

$$K(x)+L(x) =$$

$$= \frac{1+2x}{-2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} + \frac{1+x}{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{(1+2x)(x^2+x+1)+(x+1)^2}{-2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{x^2+x+1+2x^3+2x^2+2x+x^2+2x+1}{-2x^4-3x^3-2x^2+1} =$$

$$= \frac{2+5x+4x^2+2x^3}{1-2x^2-3x^3-2x^4} = G(x).$$

Tehát a $K_n^{(2)}$ és $L_n^{(3)}$ sorozatok összege egy $G_n^{(4)}$ negyedrendű lineáris rekurzív sorozat. $G(x)$ alakjából a sorozatot meghatározó kezdő elemek és együtthatók a **T.3.** tétel szerint

$G_0 = 2, G_1 = 3, G_2 = 8, G_3 = 18$ és $n \geq 4$ esetén

$$G_n = 2G_{n-2} + 3G_{n-3} + 2G_{n-4} \quad (a_1 = 0).$$

A sorozatok első néhány eleme:

n	K_n	L_n	$G_n = K_n + K_n + L_n$
0.	1	1	2
1.	3	2	5
2.	5	3	8
3.	11	7	18
4.	21	14	35
5.	43	27	70
6.	85	55	140
7.	171	110	281

E konkrét példán bemutatott eljárás általában is igaz.

T.4. Legyen $K_n^{(k)}$ egy k-adrendű és $L_n^{(s)}$ egy s-adrendű lineáris rekurzív sorozat. A $G_n = K_n + L_n$ tagokkal definiált sorozat szintén lineáris rekurzív sorozat és rendje legfeljebb $k+s$.

Bizonyítás

Mivel $K_n = \frac{1}{n!}K^{(n)}(0)$ és $L_n = \frac{1}{n!}L^{(n)}(0)$, ahol $K^{(n)}(0)$ és $L^{(n)}(0)$ a megfelelő $K(x)$ és $L(x)$ generátorfüggvények n-edik deriváltja az $x = 0$ helyen, ezért

$$G_n = K_n + L_n = \frac{1}{n!}K^{(n)}(0) + \frac{1}{n!}L^{(n)}(0) =$$
$$\frac{1}{n!}\left[K(x)+L(x)\right]^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}G^{(n)}(0) \qquad (16)$$

ahol természetesen $G(x) = K(x) + L(x)$.

A (16)-ból látszik, hogy a G_n sorozat $G(x)$ generátorfüggvénye a K_n és L_n sorozatok generátorfüggvényének összege. A $G(x)$ függvény ismeretében pedig a G_n sorozatot a (15) alapján már könnyen meghatározhatjuk. Nyilvánvaló, hogy a G_n sorozat is lineáris rekurzív sorozat lesz.

Ha a $K(x)$ és $L(x)$ generátorfüggvények kifejezéseinek nevezőiben levő polinomok „relatív prímek" – azaz nincs közük gyökük –, akkor $G(x)$ olyan racionális törtfüggvény lesz, melynek nevezőjének fokszáma $k+s$, így a G_n sorozat rendszáma $k+s$. Ha viszont $K(x)$ és $L(x)$ nevezőinek van közös gyöke, akkor a G_n sorozat rendszáma $k+s$-nél kisebb lesz.

Az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy két lineáris rekurzív sorozat összegéből alkotott lineáris rekurzív sorozat rendszáma megegyezik a két sorozat generátorfüggvénye kifejezésének nevezőjében levő polinomok legkisebb közös többszörös polinomjának a fokszámával.

Legvégül az elmondottak illusztrálására álljon itt néhány egyszerű feladat, melyek feldolgozásához sok sikert kívánok minden kedves olvasónak.

F.1. Határozzuk meg az alábbi $K_n^{(2)}$ és $L_n^{(2)}$ sorozatok összegét, ha

$K_0=1$, $K_1=4$ és $n \geq 2$-re $K_n=5K_{n-1}-6K_{n-2}$,

továbbá

$L_0=2$, $L_1=5$ és $n \geq 2$-re $L_n=7L_{n-1}-10L_{n-2}$.

F.2. Adjuk meg azokat a lineáris rekurzív sorozatokat, amelyeknek a generátorfüggvénye:

$a)\ x \mapsto \dfrac{2-x}{1-x+2x^2}$

$b)\ x \mapsto \dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2+x^3}$

$c)\ x \mapsto \dfrac{4+2x-x^2}{1-2x+x^2-2x^3+x^4}$

$d)\ x \mapsto \dfrac{d}{(1-x)^2}$,

ahol d pozitív egész szám,

$e)\ x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$

F.3. Egy lineáris rekurzív sorozat generátorfüggvénye

$$x \mapsto \frac{1}{1-x-x^2-x^3}$$

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész számnak van többszöröse a sorozatban!

F.4. Melyik az a lineáris rekurzív sorozat, amelynek a generátorfüggvénye

$$x \mapsto \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2-x^3}$$

Hasonlítsuk össze e sorozatot az előző feladatban szereplő sorozattal!

F.5. Adott a következő $G_n^{(3)}$ harmadrendű sorozat:

$$G_0 = 2,\ G_1 = 4,\ G_2 = 11$$

és $n \geq 3$ esetén

$$G_n = 4G_{n-1}-2G_{n-2}-3G_{n-3}.$$

Bontsuk fel a sorozatot alacsonyabb lineáris rekurzív sorozatok összegére!

Irodalom

[1] Sain Márton: A Fibonacci-sorozattól lánctörtekkel az aranymetszésig. Tankönyvkiadó, 1975.

[2] Rényi Alfréd: Napló az információelméletről. Gondolat, 1976.

[3] Dr. Gerőcs László: A Fibonacci-sorozat általánosítása. SCOLAR Kiadó, 1997.

Válogatás az elmúlt tanév gimnáziumi felvételi vizsgáinak matematika feladataiból

Az első négy feladatlapot Pálmay Lóránt állította össze

Feladatlap a hatosztályos speciális matematika tagozatú osztályok felvételi vizsgájára
(budapesti gimnáziumok, 1998. február, munkaidő 90 perc)

1. Egy kosárban volt egy csomó tojás. Valaki kivette a tojások egyharmadát, ezután újra kivette a maradék egyharmadát, végül megint kivette a maradék egyharmadát. Így végül 8 tojás maradt a kosárban.
Hány tojás volt eredetileg benne?

6 pont

2. Egy téglalap alakú lap területe 384 cm^2. Három vágással egybevágó négyzetlapokra vágható szét. *E* lapokból egy kocka állítható össze.
Hány cm^3 a kocka térfogata?

8 pont

3. Egy 600 fős iskolában az év végén 600 tanulóval dolgozatot írattak. A dolgozatokat a szokásos módon az 1, 2, 3, 4, 5 jeggyel értékelték. A dolgozatok $\frac{9}{20}$ része legalább jó, $\frac{9}{10}$ része pedig legfeljebb jó érdemjegyet kapott.
Pontosan hány dolgozat lett 4-es?

8 pont

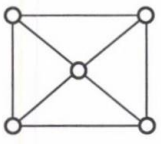
4. 1 cm^3-es kiskockákból 3 cm élű tömör kockát építettünk, majd ebből elvettünk annyi kiskockát, hogy a maradék test felszíne 60 cm^2 lett.
Legalább hány kiskockát kellett elvennünk és melyeket?

8 pont

5. A játszótéren gyerekek játszanak. Tudjuk, hogy közöttük csak 4, 6 és 10 évesek lehetnek. Életkoruk összege:
a) 39 év;
b) 40 év
Hány 4 éves, hány 6 éves, hány 10 éves gyerek lehet a játszótéren?

10 pont

6. El lehet-e helyezni az 5 karikába az 1, 2, 3, 4, 5 számokat úgy, hogy egy „él" két végpontjába írt számok összege minden élre különböző legyen? (Élnek nevezünk két karikát összekötő szakaszt.)



Ha a kérdésre a válasz igenlő, akkor adj egy lehetséges elhelyezést, ha nemleges, akkor ezt bizonyítsd be?

10 pont

Feladatlap a hatosztályos speciális matematika tagozatú osztályok felvételi vizsgájára
(budapesti gimnáziumok, 1998. március, munkaidő 90 perc)

1. A balatonboglári táborban 35-tel több gyerek van, mint a keneseiben. A boglári táborban lévő gyerekek számának $\frac{1}{3}$-a egyenlő

a kenesei táborozók számának $\frac{3}{4}$ részével.

Hány lakója van az egyes táboroknak?

6 pont

2. Egy szótár 702 oldalas.

Hány számjegy kellett az oldalak számozásához?

6 pont

3. Peti nővére 1998-ban éppen annyi éves, mint amennyi születése éve számjegyeinek összege.

Melyik évben született Peti nővére?

8 pont

4. Hány olyan téglalap van, melynek oldalai cm-ben mérve egész számok és kerülete:

a) 17 cm;

b) 1998 cm?

10 pont

5. A 0; 2; 4; 6; 8 számjegyekből hány legfeljebb három jegyű szám írható fel?

Mennyi lesz a felírt számok számjegyeinek összege?

10 pont

6. Van egy téglatest alakú ládánk, amelynek alapja egy 20 és 15 cm oldalú téglalap, magassága 14 cm. Tele lehet-e rakni teljesen ezt a ládát olyan egyforma téglatest alakú dobozzal, amelyeknek élei 3 cm, 5 cm és 10 cm?

Hány kis doboz fér bele a ládába?

10 pont

Felvételi feladatlap 8. osztályosoknak

(Fazekas Gimnázium, Budapest, 1998 február, munkaidő 60 perc)

1. Melyik nagyobb és mennyivel 235,98 és 545,02 összegének a 45%-a, vagy ugyanezen összeg $\frac{9}{20}$-ad része?

6 pont

2. Döntsd el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! (Válaszaidat indokold!)

a) Tetszőleges számhoz található olyan szám, hogy a két szám összege 0.

b) Ha egy szám osztható 10-zel is és 6-tal is, akkor 60-nal is osztható.

c) Bármely racionális szám négyzete nagyobb magánál a számnál.

6 pont

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $\frac{x-22}{3} - \frac{4-3x}{4} = 35$

b) $x \cdot (x-68) = 0$

8 pont

4. Mekkora a koordináta-rendszerben lévő ABC háromszög területe, ha a pontok koordinátái: $A(0; 0)$, $B(0; 6)$, $C(666; 3)$?

Adjuk meg egy olyan D pont koordinátáit, melyre ABD háromszög tompaszögű és területe megegyezik az ABC háromszög területével.

10 pont

5. Egy osztályban 25-en írtak matematika dolgozatot. Elégtelen nem volt, a dolgozatok átlaga 3,44 volt.

a) Lehet-e, hogy a dolgozatok között 5-ös sem volt?

b) Legfeljebb hány 2-es dolgozat lehetett?

10 pont

6. Adott egy 2 cm oldalú szabályos háromszög. Illesszünk ehhez egy olyan derékszögű háromszöget, melynek egyik oldala szintén 2 cm, s a két háromszög együtt egy trapézt alkot.

Mekkorák lehetnek a trapéz szögei?

10 pont

Felvételi feladatlap matematikából 8. osztályosoknak

(Fazekas Gimnázium, Budapest, 1998. március, munkaidő 60 perc)

1. *a)* Melyik szorzat értéke nagyobb: $99{,}2 \cdot 1{,}09$ vagy $0{,}992 \cdot 109$?

b) Valaki a 40-et elosztotta 111-gyel. A tizedesvesszőtől jobbra az 1998. helyen milyen számjegy áll?

6 pont

2. Az áru árát 40%-kal felemelték, majd 30%-kal csökkentették. A kétszeri árváltoztatás után az áru az eredeti árhoz képest hány %-kal lett olcsóbb vagy drágább?

6 pont

3. Szerkesszünk háromszöget, ha a oldalának hossza 5 cm, b oldalának hossza 6 cm és c oldalához tartozó magasságának hossza 4 cm!

8 pont

4. Ábrázoljuk a derékszögű koordinátarendszerben az $x \mapsto 0{,}5x+2$ és a $x \mapsto -0{,}5x+4$ függvényt. Az x tengely, az y tengely és a két ábrázolt egyenes egy négyszöget zár közre. Mik a négyszög csúcsainak koordinátái? Mekkora a négyszög területe?

10 pont

5. Egy tetszőleges háromjegyű szám utolsó jegyét a szám elejére hoztuk. Igazoljuk, hogy ha az így kapott új számot kivonjuk az eredeti számból, akkor a különbség 9-cel osztható lesz.

10 pont

6. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja F. A C csúcsból induló magasságvonal az átfogót T pontban metszi. Igazoljuk, hogy $ACT\sphericalangle = BCF\sphericalangle$!

10 pont

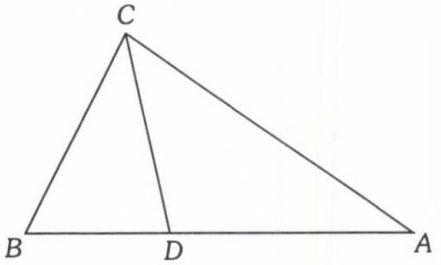
A következő 7 feladatlap a budapesti Berzsenyi Dániel Gimnáziumban a jelzett tagozatban szerepelt felvételiken 8. osztályosoknak, a munkaidő mindenhol 40 perc.

Olasz tagozat

(1998. február)

1. Egy 1 m élű nagy kockát 1 mm^3-es kis kockákból raktunk össze. Milyen hosszú szakaszt kapnánk, ha ezeket a kis kockákat egymás mellé raknánk?

2. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöge 72°. A D pont az AB oldalon úgy helyezkedik el, hogy $BC = CD = DA$. Mekkora az A csúcsnál lévő szög?



3. Hány 6-tal osztható hatjegyű szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, ha mindegyik jegyet csak egyszer használhatjuk fel?

Olasz tagozat

(1998. március)

1. Melyik az a szám, amelynek a négyszerese 2-vel kisebb, mint a nála 3-mal nagyobb szám 3-szorosa?

2. Az ABC háromszög B oldalát B-n túl, BC oldalát C-n túl, CA oldalát A-n túl meghosszabbítjuk a kétszeresére. Így az A_1, B_1, C_1, pontokhoz jutunk. Hányszorosa az $A_1B_1C_1$ háromszög területe a ABC háromszög területének?

3. Egy gyerekcsapat a nyári vakáció idején egy láda kincsre bukkant. A ládában 48 ezüst tálka, 72 ezüst pohár és 100 igazgyöngy volt.

A gyerekek éppen annyian voltak, hogy mind a háromféle tárgyon igazságosan tudtak osztozni. Hányan lehettek?

Angol tagozat
(1998. február)

1. Egy osztályban 8 tanulónak volt matematikából ötöse. Ötnek sikerült matematikából és angolból is ötöst kapnia. 14 akadt, akinek a két tárgy közül legalább az egyikből ötöse volt. Hány ötös volt angolból?

2. Mennyi az x értéke, ha

$$\frac{x+4}{3}+\frac{x-1}{2}=1+\frac{x+4}{4}$$

3. Az ABC háromszög A és B csúcsából induló szögfelezője 60°-os szöget zár be egymással. Mekkora a C csúcsnál lévő szög?

Angol tagozat
(1998. március)

1. Melyik az a szám, amelynek $\frac{3}{4}$ része 5-tel több az $\frac{1}{3}$ részénél?

2. Mekkorák a rombusz szögei, ha a tompaszögű csúcsból induló magassága felezi a szemköztes oldalt?

3. Egy autóbusz végállomásról egyszerre indítanak déli 12 órakor két különböző útvonalon közlekedő buszt. Az egyik útvonalon 12 percenként, a másikon 15 percenként indulnak a kocsik. Mikor fog ismét egyszerre indulni két busz a végállomásról?

Biológia-Kémia Tagozat
(1998. február)

1. Melyik x szám elégíti ki a következő egyenletet?

$$7-2x-\frac{1-3x}{7}=2-\frac{2x-1}{3}$$

2. Egy konvex sokszög belső szögeinek összege 1980°. Hány oldalú a sokszög?

3. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyekhez ha 4-et adunk, akkor a kapott szám számjegyeinek összege fele akkora, mint az eredeti szám jegyeinek összege?

Biológia-Kémia Tagozat
(1998. március)

1. Egy gondolt szám kétszereséhez négyet adva, majd az összeg harmadrészét véve a gondolt számnál kettővel nagyobb számot kapok. Melyik számra gondoltam?

2. Hány darab 5-re végződő 4 jegyű szám van?

3. Egy országutat fasor szegélyez. A fák 15 méterenként állnak. Az út másik oldalán telefonoszlopok sorakoznak, 40 méteres közökben. Egy bizonyos helyen az út két oldalán egymással szemben áll egy oszlop és egy fa. Milyen távolságonként ismétlődik meg ez a találkozás?

Humán Tagozat
(1998. február)

1. Egy osztály 28 tanulója közül 8-an felvételiztek matematikából, 6-an magyarból és 4 tanuló mindkét tárgyból. Hányan voltak az osztályból, akik se matematikából, se magyarból nem felvételiztek?

2. 555 Ft-ot egyenlő számú 5 és 10 forintos érmékkel akarunk kifizetni. Hány darab 5 és 10 forintosra van ehhez szükség?

3. Egy téglalap rövidebb oldala 3 cm, az átlói 60°-os szöget zárnak be egymással. Milyen hosszúak a téglalap átlói?

Kocsis Orsolya

Kenó matek

Rövid idővel ezelőtt egy új szerencsejáték jelent meg a KENÓ. A szabályokat talán már mindenki ismeri: 1-80-ig terjedő természetes számok közül kihúznak 20-at. A fogadó feladata eldönteni, hogy hány darab szám eltalálására vállalkozik 1 és 10 között. A szelvényen található nyerőtábla tartalmazza, hogy adott játéktípus esetén hány darab szám eltalálása szükséges ahhoz, hogy az általunk befizetett összeg valahányszorosát visszanyerjük.

A játék lényegét a matematika nyelvén így fogalmazhatjuk: egy urnában elhelyezzük az 1, 2, ..., m számokat, melyek közül kihúznak n darabot. A játékos célja, hogy az általa kiválasztott k darab és a kihúzott n darab szám között minél több azonos legyen ($m = 80$; $n = 20$; $1 \le k \le 10$). Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a játékos pontosan t találatot ér el ($0 \le t \le k$).

E feladat matematikai modellje azonos a következő mindennapi életből ismert problémával: adott m számú munkadarab, melyek között k darab selejtes. Mi a valószínűsége annak, hogy a sokaságból n darabot kihúzva pontosan t számú hibás egyedet kapunk?

KENÓ problémák megoldásánál a következő módon okoskodhatunk: Tegyük fel, hogy $1 \le n \le m$, $1 \le k \le n$, $0 \le t \le k$

Számunkra kedvező esemény akkor következik be, ha az általunk kiválasztott k szám közül t darab van az n kihúzott szám között és (k-t) darab pedig a ki nem húzott (m-n) szám között van.

Így a kedvező esetek száma $\binom{n}{t}\binom{m-n}{k-t}$.

Összesen pedig annyi eset lehetséges ahány féle képpen m szám közül ki tudunk választani k darabot, vagyis $\binom{m}{k}$.

Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\binom{n}{t}\binom{m-n}{k-t}}{\binom{m}{k}}$$

Feladatunkra helyes eredményt kapunk akkor is, ha problémánkat nem a szám „k-asok", hanem a szám „n-esek" szempontjából vizsgáljuk:

Kedvező esemény akkor következik be, ha a kiválasztott k szám között t találat van

$$(\text{ez } \binom{k}{t} \text{ eset})$$

és a ki nem választott ($m - k$) darab számban pedig ($n - t$) darab kihúzott számot nem találtunk el

$$(\text{ez } \binom{m-k}{n-t} \text{ eset}).$$

Így a kedvező esetek száma:

$$\binom{k}{t}\binom{m-k}{n-t}$$

Összesen pedig annyi eset lehetséges ahány féle képpen m darab számból ki tudunk választani n darabot, tehát $\binom{m}{n}$.

Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\binom{k}{t}\binom{m-k}{n-t}}{\binom{m}{n}}$$

Ezzel igazoltuk a következő tételt:

I. Tétel: Ha az m, n, k, t természetes számokra teljesül, hogy $1 \le n \le m$, $0 \le k \le n$, és $0 \le t \le k$ akkor:

$$\frac{\binom{n}{t}\binom{m-n}{k-t}}{\binom{m}{k}} = \frac{\binom{k}{t}\binom{m-k}{n-t}}{\binom{m}{n}}$$

A következő két állítást elemi úton is könnyen igazolhatjuk, de közvetlenül adódik tételünk következményeiként:

– Ha a fentiekben említett feltételek teljesülnek, akkor egyszerű rendezéssel kapjuk, hogy:

$$\frac{\binom{n}{t}\binom{m}{n}\binom{m-n}{k-t}}{\binom{k}{t}\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-t}}=1$$

– Az $m \geq n \geq x$ természetes számokra ?

$$\frac{\binom{m}{n}\binom{n}{x}}{\binom{m}{x}}=\binom{m-x}{n-x}$$

Megjegyzés: alkalmazzuk a fenti tételünket telitalálatra a $k = t = x$ jelölést bevezetve, továbbá felhasználjuk, hogy

$$\binom{k}{0}=\binom{k}{k}=1$$

Ha figyelembe vesszük a KENÓ játéknál m, n, k, t lehetséges értékeit, s alkalmazzuk a korábban P-re kapott összefüggések valamelyikét akkor az egyes találatokat a következő valószínűségekkel érhetjük el. (Lásd az 1. táblázatban).

Ha találataink száma a táblázat sötétebb tartományába esik akkor számíthatunk némi nyereményre, amely lehet pusztán az általunk befizetett összeg, de csekély valószínűséggel elérheti annak milliószorosát is (10-es találat!). Legnagyobb valószínűséggel (25%-os) pénzünk duplája nyerhetjük vissza, ha egy számot jelölünk, s ez a húsz kihúzott között van.

A valószínűségekre kapott összefüggésekből következik, hogy a KENÓ játékunk valószínűségei hipergeometrikus eloszlást alkotnak, s a táblázat bármely oszlopában a számok összege: 1

Ez következik azon tényből, hogy k darab szám választása esetén valamennyi találatunk biztos hogy lesz a 0 és k között, így az egyes oszlopokban lévő események valamelyike biztos, hogy bekövetkezik, azok összege biztos esemény, vagyis azok teljes eseményrendszert alkotnak. Ezt figyelembe véve KENÓ játékunk általánosításaként kimondhatjuk a következő tételt:

II. Tétel: Ha az m, n, k természetes számokra teljesül, hogy $m \geq n \geq k$ akkor:

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{\binom{n}{i}\binom{m-n}{k-i}}{\binom{m}{k}}=1$$

Ha megfigyeljük a táblázatot észrevesszük, hogy minden oszlopban van egy maximális valószínűség érték. Bizonyítható, hogy ezt a hipergeometrikus eloszlás várhatóérték számítási képletével kaphatjuk meg, mely példánkban: $M = k \cdot \frac{n}{m}$ alakú. Így például ha valaki 8 szám eltalálására vállalkozik, akkor szelvényén legnagyobb valószínűséggel $M = 8 \cdot \frac{20}{80} = 2$ találat lesz.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t										
0	0,75	0,560127	0,416504	0,3083214	0,2271842	0,1666018	0,121574252	0,088266238	0,063747838	0,045790701
1	0,25	0,379747	0,430867	0,4327318	0,4056861	0,3634947	0,315192505	0,266464114	0,220665594	0,179571376
2		0,060127	0,138754	0,2126355	0,2704574	0,3083214	0,326654051	0,328145622	0,316426135	0,295256781
3			0,013875	0,0432479	0,0839351	0,1298195	0,174993241	0,214786225	0,246109216	0,267402368
4				0,0030634	0,0120923	0,0285379	0,052190967	0,0811503701	0,114105182	0,147318897
5					0,0006449	0,0030956	0,008638505	0,018302586	0,032601481	0,051427688
6						0,000129	0,000732077	0,002366714	0,005719558	0,011479395
7							0,0000244	0,000160455	0,000591678	0,001611143
8								0,00000434	0,0000325	0,000135419
9									0,000000724	0,00000612
10										0,000000112

1. táblázat

Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 1999. január 31.**

110. Legyen n pozitív egész szám. Létezik-e $2n+1$ darab egymást követő $a_0<a_1<a_2...<a_{2n}$ természetes szám úgy, hogy

$$a_0^3 + a_1^3 + ... + a_n^3 = a_{n+1}^3 + ... + a_{2n}^3$$

teljesüljön?

„Concours général" verseny, Franciaország

111. Mutassuk meg, hogy ha egy egész szám négyzetének utolsó két jegyéből képzett, legfeljebb kétjegyű szám is négyzetszám, akkor ugyanezen tulajdonsággal minden 50-nel megnövelt egész szám is rendelkezik! Legfeljebb hány egymást követő egész számra teljesülhet, hogy mindegyikük négyzetének utolsó két jegyéből képzett, legfeljebb kétjegyű szám is négyzetszám?

Darvasi Gyula, Nyíregyháza

112. Igaz-e, hogy bármely $n>3$ alapú számrendszerben van olyan $n+3$ jegyű szám, amelynek az első számjegye egyenlő a számban található 0-k számával, a második számjegye az 1-esek számával, a harmadik számjegye a 2-esek számával, és így tovább?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

113. Határozzuk meg azon $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre bármely pozitív x és y esetén teljesül, hogy

$$1 + f(x-y) \le \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 \cdot (1 + f(xy))!$$

Bencze Mihály, Brassó

114. Egy téglatest egy csúcsba futó éleinek hosszát jelölje a, b, c, ahol a, b és c páronként relatív prím pozitív egészek. Bontsuk fel a téglatestet egységkockákra, majd egy kiszemelt csúcsba befutó élek másik végpontjaira illeszkedő síkkal vágjuk ketté. Hány egységkockát vág ketté a tekintett sík?

Feladatmegoldások (95-99. feladatok)

95. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív számok halmazán!

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = 4$$
$$x_2 + \frac{1}{x_3} = 1$$
$$x_3 + \frac{1}{x_4} = 4$$
$$\vdots$$
$$x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4$$
$$x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1$$

Kvant, Oroszország

I. megoldás: Az ismeretlenekre vonatkozó feltétel alapján alkalmazhatjuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget mindegyik egyenletre, ahonnan kapjuk, hogy

$$\frac{x_1}{x_2}\le 4;\ \frac{x_2}{x_3}\le\frac{1}{4};\ \ldots;\ \frac{x_{99}}{x_{100}}\le 4;\ \frac{x_{100}}{x_1}\le\frac{1}{4}\ .$$

Ezek összevetéséből a következő egyenlőtlenség-lánc adódik:

$$x_1 \le 4x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_{99} \le 4x_{100} \le x_1\ .$$

Ez nyílván csak akkor teljesülhet, ha mindenütt egyenlőség áll, amiből adódóan az egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{99} = 2 \text{ és } x_2 = x_4 = \ldots = x_{100} = \frac{1}{2}\ .$$

Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép
Ványa István, Szeged

II. megoldás: Adjuk össze külön a páratlan és külön a páros sorszámú egyenleteket, majd az első összeget osszuk 100-zal, a második összeggel pedig osszuk el a 100-at.

$$\text{Így } \frac{x_1+\frac{1}{x_2}+x_3+\frac{1}{x_4}+\ldots++x_{99}+\frac{1}{x_{100}}}{100}=2$$

$$\text{és } \frac{100}{\frac{1}{x_1}+x_2+\frac{1}{x_3}+x_4+\ldots+\frac{1}{x_{99}}+x_{100}}=2$$

A kapott első egyenlet bal oldalán az

$$x_1;\ \frac{1}{x_2};\ x_3;\ \ldots;\ x_{99};\ \frac{1}{x_{100}}$$

pozitív számok számtani közepe, a második egyenlet bal oldalán ugyanezen számok harmonikus közepe áll. Ezek csak úgy lehetnek egyenlőek, ha

$$x_1=\frac{1}{x_2}=x_3=\ldots=x_{99}=\frac{1}{x_{100}}=2.$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát:

$$x_1=x_3=\ldots=x_{99}=2 \text{ és } x_2=x_4=\ldots=x_{100}=\frac{1}{2}.$$

Csorba Ferenc, Győr
Nagy Erzsébet, Debrecen

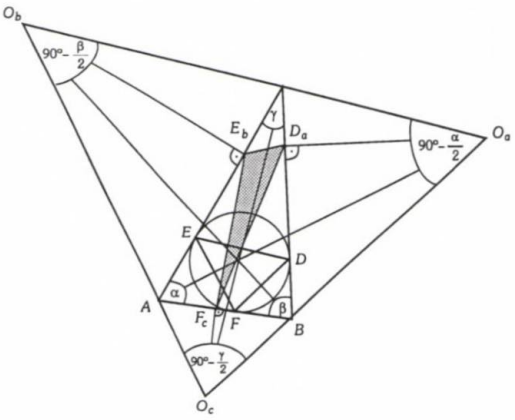
A megoldók száma: 14.

96. Az ABC háromszög beírt körének az a, b, c oldalakkal való érintési pontjai legyenek rendre D, E, F. Az oldalakhoz írt körök középpontjait jelölje O_a, O_b, O_c, ezen köröknek az oldalakkal vett érintési pontjait pedig D_a, E_b, F_c. Igazoljuk, hogy

$$a)\ T_{DEF}=T_{D_aE_bF_c}\ ;\ b)\ T^2_{ABC}=T_{O_aO_bO_c}\cdot T_{DEF}\ !$$

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

Megoldás: *a)* Az 1. ábra jelöléseit használjuk.



1. ábra

A $T_{DEF}=T_{D_aE_bF_c}$ teljesüléséhez elegendő azt bizonyítani, hogy

$$(T_{AE_bF_c}+T_{F_cBD_a}+T_{D_aCE_b})-$$
$$-(T_{AEF}+T_{CDE}+T_{BDF})=0 \qquad (1)$$

Ismert, hogy ha s jelöli az ABC háromszög félkerületét, akkor

$$AF_c=CD_a=BD=BF=s-b;$$
$$AE_b=BD_a=CD=CE=s-c;$$

$$CE_b=BF_c=AF=s-a.$$

Ezeket felhasználva (1) bal oldala a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{8}\left\{\left[a^2-(b-c)^2\right]\sin\alpha+\left[b^2-(a-c)^2\right]\sin\beta+\right.$$

$$\left.+\left[c^2-(a-b)^2\right]\sin\gamma\right\}-\frac{1}{8}\left\{(b+c-a)^2\sin\alpha+\right.$$

$$\left.+(a+c-b)^2\sin\beta+(a+b-c)^2\sin\gamma\right\}.$$

A megfelelő műveletek, összevonások és csoportosítások elvégzése után a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{1}{4}\left[a^2(\sin\beta+\sin\gamma)+b^2(\sin\beta+\sin\gamma)+\right.$$

$$\left.+c^2(\sin\alpha+\sin\beta)\right]-\frac{1}{4}\left[ac(\sin\alpha+\sin\gamma)+\right.$$

$$\left.+ab(\sin\alpha+\sin\beta)+bc(\sin\beta+\sin\gamma)\right] \quad (2)$$

Felhasználva, hogy $c\sin\beta = b\sin\gamma = m_a$, $a\sin\gamma = c\sin\alpha = m_b$ és $b\sin\alpha = a\sin\beta = m_c$ (2) kifejezés azonosan 0-nak adódik, ami az állítást bizonyítja.

b) A bizonyításhoz felhasználjuk a következő ismert tételeket:

(a) Az ABC háromszög az $O_aO_bO_c$ háromszög talpponti háromszöge.

(b) A talpponti háromszög köré írható kör (Feuerbach-kör) sugara fele olyan hosszú, mint az eredeti háromszög köré írható kör sugara.

Jelölje R az ABC háromszög köré írható, r pedig a beírható körének sugarát. Így *(a)* és *(b)* szerint az $O_aO_bO_c$ háromszög köré írható kör sugara $2R$. Kifejezve az egyes háromszögek területét a beírt és körülírt körök sugaraival, valamint a háromszög szögeivel, kapjuk, hogy

$$T_{ABC}=\frac{1}{2}Rr(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma);$$

$$T_{DEF}=\frac{1}{2}r^2((\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma);$$

$$T_{O_aO_bO_c}=2R^2\left(\sin\left(90°-\frac{\alpha}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\sin\left(90°\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\right)=$$

$$=2R^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Könnyen bizonyítható, hogy ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.$$

Ezzel

$$T_{O_aO_bO_c}=\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

A területekre kapott összefüggéseket beírva a bizonyítandó állításba, azonosságot kapunk.

László Sándor, Szombathely

A megoldók száma: 11.

97. Az $f(x)=x^2+ax+b$ és $g(x)=x^2+cx+d$ és polinomok teljesítik a következő három feltételt:

(1) Mindkét polinomnak két különböző valós gyöke van.

(2) Ha s gyöke f-nek, akkor $g(s)$ is gyöke f-nek.

(3) Ha r gyöke g-nek, akkor $f(r)$ is gyöke g-nek.

Határozzuk meg a polinomokat!

Mészáros József, Galánta

Megoldás: Legyenek f gyökei s_1, s_2, g gyökei r_2, r_2. A feladat feltételei szerint a következőknek kell teljesülniük:

(I) $s_1=g(s_1)$ és $s_2=g(s_2)$, vagy (II) $s_1=g(s_2)$ és $s_2=g(s_1)$, vagy (III) $s_1=g(s_2)$, vagy (IV) $s_2=g(s_1)=g(s_2)$, illetve

(A) $r_1=f(r_1)$ és $r_2=f(r_2)$, vagy (B) $r_1=f(r_2)$ és $r_2=f(r_1)$, vagy

(C) $r_1=f(r_1)=f(r_2)$, vagy (D)$r_2=f(r_1)=f(r_2)$.

(I)-ből $s_1^2+cs_1+d=s_1$ és $s_2^2+cs_2+d=s_2$, a két egyenlet különbsége:

$$(s_1-s_2)(s_1+s_2)+c(s_1-s_2)=s_1-s_2.$$

$s_1-s_2\neq 0$, $s_1+s_2=-a$, így $c-a=1$ adódik.

Hasonló gondolatmenettel (II)-ből $c-a=-1$, (III)-ból és (IV)-ből $a=c$. Ugyanígy (A)-ból $c-a=-1$, (B)-ből $c-a=1$,(C)-ből és (D)-ből $a=c$ adódik.

A szimmetriákat figyelembe véve elegendő foglalkoznunk az (I) és (B), valamint a (III) és (C) esetekkel.

(I) és (B) esetben $c=a+1$. $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+(a+1)x+d$, ahonnan adódik, hogy $g(x)=f(x)+x+d-b\cdot s_1=g(s_1)$, amiből $d=b$ adódik.

$g(r_2)=f(r_2)+r_2+d-b$, azaz $0=r_1+r_2$, ebből pedig $c=0$, $a=-1$.

Kaptuk, hogy $f(x)=x^2-x+b$, $g(x)=x^2+b$. Két különböző valós gyök létezéséhez teljesülnie kell az $1-4b>0$ és $b<0$ feltételeknek, ahonnan adódik, hogy $b<0$ tetszőleges valós szám.

(A szimmetria miatt (II) és (A) esetén $f(x)=x^2+b$, $g(x)=x^2-x+b$, és $b<0$ tetszőleges valós szám.)

(III) és (C) esetben $a=c$. $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+ax+d$, ahonnan $f(x)-g(x)=b-d$. $f(s_2)-g(s_2)=b-d$, azaz $b-d=-s_1$, $f(r_1)-g(r_1)=b-d$, azaz $b-d=r_1$, tehát $r_1=-s_1$. $s_1+s_2=-a=-c=r_1+r_2$, így $r_2=2s_1+s_2$.

Másrészt $s_1s_2=b=r_1+d=r_1+r_1r_2=r_1(1+r_2)=-s_1(1+2s_1+s_2)$. Ebből $s_1(2s_1+2s_2+1)=0$ adódik.

Ha $s_1=0$, akkor $r_1=0$, $b=d=0$, így $f(x)=g(x)=x^2+ax$, ahol $a\neq 0$ tetszőleges valós szám.

Ha $2s_1+2s_2+1=0$, akkor $-a=s_1+s_2=-\frac{1}{2}$, $f(x)=x^2+\frac{x}{2}+b$, $g(x)=x^2+\frac{x}{2}+d$.

Legyen $s_1\neq 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor

$$s_2=-s_1-\frac{1}{2},\ b=-s_1^2-\frac{1}{2}s_1\cdot f(x)$$

diszkriminánsa

$$\frac{1}{4}+4s_1^2+2s_1=\left(2s_1+\frac{1}{2}\right)^2>0,$$

vagyis $s_1\neq -\frac{1}{4}\left(r_1\neq\frac{1}{4}\right)$.

$g(x)=x^2+\frac{x}{2}+d$, $r_1=s_1$, így

$d=-s_1^2+\frac{1}{2}s_1\cdot g(x)$ diszkriminánsa

$$\frac{1}{4}+4s_1^2-2s_1=\left(2s_1-\frac{1}{2}\right)^2>0,\ \text{azaz}$$

$$s_1\neq\frac{1}{4}\left(r_1\neq-\frac{1}{4}\right).$$

Kaptuk tehát, hogy

$$f(x)=x^2+\frac{x}{2}+b, g(x)=x^2+\frac{x}{2}+d,$$

$b=-s_1^2-\frac{1}{2}s_1, d=-s_1^2+\frac{1}{2}s_1$, ahol

$$s_1\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{4};0;\frac{1}{4}\right\}.$$

(Az $s_1=0$ esetet már korábban megvizsgáltuk.)

Eredményeink helyességét behelyettesítéssel igazolhatjuk.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 6.

98. Az öt szabályos test közül melyeket lehet úgy elhelyezni egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben, hogy a test csúcsainak minden koordinátája egész szám legyen?

Megoldás: I. A kockát, a tertaédert és az oktaédert el lehet helyezni a kívánt módon.

A következő nyolc pont egy kocka nyolc csúcsa:

$A(0;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;2;2)$, $D(0;2;0)$, $E(2;0;0)$, $F(2;0;2)$, $G(2;2;2)$, $H(2;2;0)$.

Azok a teraéderek, amelyeknek ez a kocka a bennfoglaló paralelepipedonja (2 ilyen van) jók, azaz minden csúcsuk egész koordinátákkal rendelkezik. (Pl. *ACFH*)

A fenti kocka lapközéppontjai mind egész koordinátájúak, és szabályos oktaédert határoznak meg.

II. A szabályos dodekaédert és ikozaéedert nem tudjuk a megfelelő módon elhelyezni a koordináta-rendszerben.

A szabályos dodekaéder oldallapjai szabályos ötszögek, az ikozaédernek pedig egy tetszőleges csúcsával élszomszédos öt csúcsa alkot szabályos ötszöget. Szabályos rácsötszög pedig nem létezik, ugyanis oldala és átlója arányának négyzete irracionális (az oldal az átló aranymetszete), és ha létezne szabályos rácsötszög, akkor a tekintett arány négyzetének racionálisnak kellene lennie.

A megoldók száma: 9.

99. Határozzuk meg az α azon valós értékeit, amelyekre a

$$\left\{\sin\left(3^n\alpha\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

sorozat konvergens!

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: Legyen $x_n = \sin\left(3^n\alpha\right)$.

Így $x_{n+1} = \sin 3\cdot(3^n\alpha) = 3\sin(3^n\alpha) - -4\sin^3(3^n\alpha) = 3x_n - 4x_n^3$.

Ha a sorozat konvergens és határértéke x, akkor

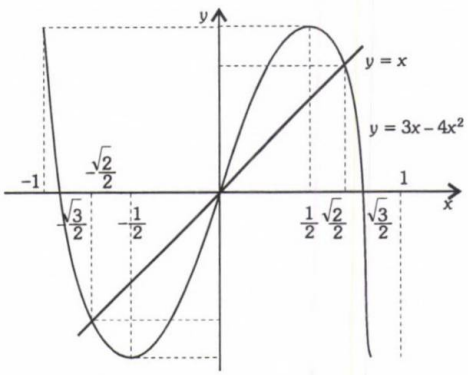
$$x = 3x - 4x^3, \text{ vagyis } x \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

$$\text{Az } x_{n+1} = 3x_n - 4x_n^3, x_0 = \sin\alpha \in [-1,1]$$

rekurzióval értelmezett sorozat az

$$f:[-1,1] \to [-1,1],\ f(x) = 3x - 4x^3$$

grafikus képe alapján tanulmányozható. (2. ábra)



2. ábra

A helyi szélsőérték helyeken

$$f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{és} \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = f(1) = -1.$$

A függvény fixpontjai (ezekben a pontokban metszi a függvény grafikonja az $y=x$ egyenest):

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mivel

$$\left|f'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = \left|f'(0)\right| = \left|f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| = 3 > 1,$$

ezért a fixpontok mindegyikének van olyan U környezete, hogy

$$x_k \in U \Rightarrow \exists l > k, \text{ amelyre } x_l \notin U.$$

Ezek alapján

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{ ahol } x \text{ a } -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

számok valamelyike akkor és csakis akkor lehetséges, ha

$$\exists\, k \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x_k = x.$$

Ebből a szükséges és elegendő feltételből adódnak a megfelelő α értékek.

$$x_k = 0 \Leftrightarrow \sin\left(3^k\alpha\right) = 0 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}: 3^k\alpha = p\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in \left\{\frac{p\pi}{3^k} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\} = A.$$

$$x_k = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3^k\alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \in \left\{(-1)^p \frac{\pi}{4\cdot 3^k} + \frac{p\pi}{3^k} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\} = B$$

$$x_k = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \in \left\{(-1)^{p+1} \frac{\pi}{4\cdot 3^k} + p\frac{\pi}{3^k} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\right\} = C$$

A tekintett sorozat tehát akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\alpha \in A \cup B \cup C \ .$$

Dáné Károly, Marosvásárhely

A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (95-98.); Dályay Pál Péter, Szeged (95. 2 mód, 96. 2 mód, 97. 2 mód, 98., 99.); Dáné Károly, Marosvásárhely (95., 96., 98., 99.); Fitos László, Esztergom (95., 96., 98.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (95., 96., 99.); László Sándor, Szombathely (95., 96.); Kiss Géza, Kisújszállás (95., 96.); Kondor László, Dunaújváros (95.); Mészáros József, Galánta (95., 97.); Nagy Erzsébet, Debrecen (95., 97., 98.); Schutzbach Mártonné, Siófok (98.); Simon József, Csíkszereda (95. 2 mód, 96-98.); Tamási Csaba, Csíkszereda (95-97., 99.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (95., 96., 98., 99.); Ványa István, Szeged (95-99.).

Skanderáné dr. Apor Mária

A területszámítás tanításának egy lehetséges módja az 13-14 éveseknél

A matematikatanítás jelenlegi rendszerében a középiskolák utolsó évfolyamán jelentős szerepet kap a felszín- és térfogatszámítás. A téma tanítását természetesen megelőzi a területszámítás ismétlése. A tanítás során azt tapasztaltam, hogy bár a diákok természetes módon alkalmazzák pl. a téglalap, háromszög , paralelogramma stb. ismert területképleteit, mégis meglepi őket a kérdés: „Miért (pont) így számítjuk ki a legegyszerűbb sokszögek területét?"

A kérdésre minden segítség nélkül csak kevesen válaszolnak jól, a területdarabolás módszerét nehezen ismerik fel, bár az általános iskolában nyilván találkoztak vele. Ahhoz, hogy a sokszögek területét, mint függvényt definiálhassuk, szükség van arra, hogy ezekre a kérdésekre választ adjunk.

Iskolánkban, a nagyatádi Ady Endre Gimnáziumban az 1994-95-ös tanévben indult először hatosztályos gimnáziumi képzés egy osztályban. A 24 tanuló a város és a környék falvainak általános iskoláiból jött. A tanulók felvételi vizsgát nem tettek, tehát válogatás nem történt. Az előképzettség, amellyel érkeztek különböző,

így a tanításban célszerű volt (szinte) mindent az alapoknál kezdeni. Így történt ez a geometria tanításánál is.

Célként fogalmaztam meg:

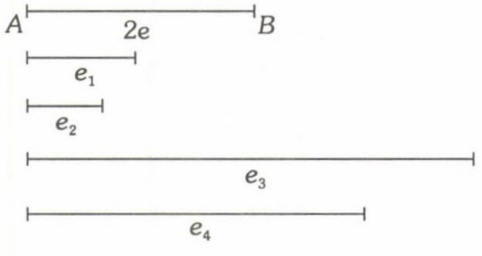
- pontos fogalomalkotás;
- a tapasztalat, a közvetlen megfigyelés segítségével következtetések levonása, ezzel új ismeretek szerzése;
- a tények elfogadása (elfogadtatása) helyett a „miért" kérdés folyamatos felvetése és az ezekre adott válaszok megtalálása;
- a bizonyítási igény felkeltése.

A célok megvalósításához szükséges módszerek kiválasztásánál fontos szerepet játszott az életkori sajátosságok figyelembe vétele.

Számomra új feladatot jelentett ennek a korosztálynak a tanítása. A tanulók többsége saját bevallása szerint nem szereti a geometriát, mert elvontnak tartja. Ezért is fontosnak tartottam a szemléltetést, a modellezést, alkalmazásukkal az egzakt geometriatanításhoz való közelítést.

A továbbiakban a területszámítás tanításáról kívánok beszámolni, amelyre az 1995-96 -os tanévben került sor a nyolcadik osztályban (azaz a hatosztályos gimnázium második osztályában).

A korábban már tanult fogalmak (mérés mint összehasonlítás, egység, mérőszám) ismétlésekor a szakasz mérésénél már tapasztaltuk azt, hogy az egység megváltoztatható, ezzel a mérőszám is megváltozik.



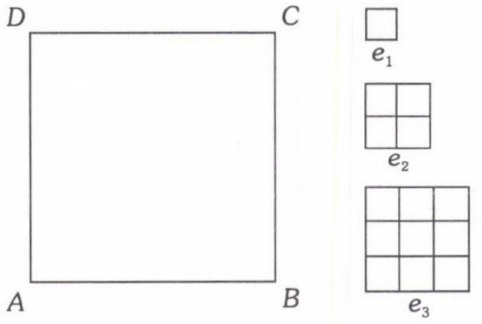
$AB = 2e_1$

$AB = 3e_2$

$AB = \frac{1}{2}\ e_3$

$AB = \frac{2}{3}\ e_4$

A területszámítás bevezetéseként először egész oldalhosszúságú négyzeteket fedtünk le egységnyi oldalú négyzetekkel és így határoztuk meg a négyzet területét.



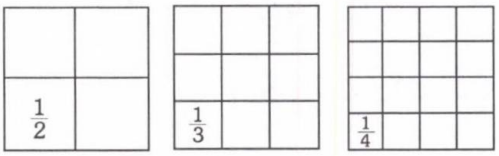
$T_{ABCD} = 6 \cdot 6e_1^2 = 36e_1^2$

$T_{ABCD} = 3 \cdot 3e_2^2 = 3 \cdot 3 \cdot (4\ e_1^2) = 36e_1^2\ (e_2^2 = 4e_1^2)$

$T_{ABCD} = 2 \cdot 2e_3^2 = 2 \cdot 2 \cdot (9\ e_1^2) = 36e_1^2\ (e_3^2 = 9e_1^2)$

Itt is tapasztaltuk, hogy az egység megváltoztatásával a mérőszám is megváltozik. Fontos volt azonban, hogy az egyik területegységről át tudjunk térni a másikra. Ehhez az e_2 illetve e_3 hosszegységgel megadott négyzeteket is lefedtük e_1 oldalhosszú négyzetekkel.

Nehezebb feladatnak bizonyult a négyzet területének meghatározása, ha az oldalhossz racionális szám. Először egységnyi oldalhosszúságú négyzetet választottunk és ezt fedtük le $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... oldalhosszúságú négyzetekkel.



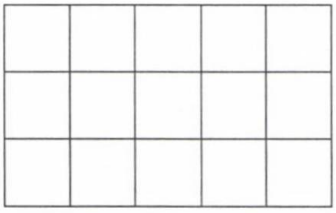
Az egységnyi területű négyzetet 4 db $\frac{1}{2}$, 9 db $\frac{1}{3}$, 16 db $\frac{1}{4}$ oldalhosszúságú négyzettel tudtuk lefedni, így a kis négyzetek területe rendre $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$ területegység, és ez az oldalhosszak szorzatával számítható ki. Ennek ismeretében pl. a $\frac{2}{3}$ oldalhosszúságú négyzet terü-

letét 4 db $\frac{1}{3}$ oldalhosszúságú négyzettel tudtuk lefedni, így a területe $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ területegység.

További feladatok hasonló megoldása alapján elfogadtuk, hogy a négyzet területe az oldalhosszak szorzataként számítható ki.

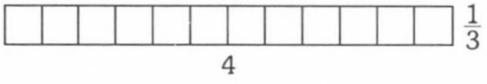
A következő kérdés az volt, hogy vajon a téglalap területe is egyenlő-e az oldalhosszak szorzatával. A választ csak úgy tudtuk megadni, ha az alábbi lehetőségeket sorra vettük.

Ha a téglalap oldalai egész számok, akkor könnyű volt egységnyi területű négyzetekkel lefedni.



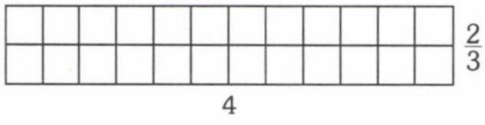
$T = 3e \cdot 5e = 15e^2$

Ha a téglalap egyik oldala $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, másik oldalának hossza egész szám, akkor mindig lefedhető egész számú $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, oldalhosszú négyzetekkel. Mivel ezek területét már ismerjük, a téglalap területe az alábbi módon határozható meg:



$T = 12 \cdot \frac{1}{9} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ területegység

Ha a téglalap egyik oldala egytől különböző számlálójú racionális szám, a másik oldala egész, akkor az előző esethez hasonlóan határoztuk meg a területét:

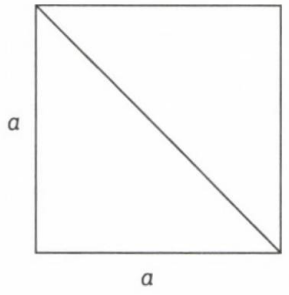


$T = 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

Sok feladat megoldása után, közvetlen tapasztalat alapján elfogadtuk, hogy a téglalap területét az oldalhosszak szorzatával számíthatjuk ki. (Irracionális oldalhosszúságú idomokkal itt még felesleges foglalkozni.)

A sokszögek területképleteinek többségét a területdarabolás módszerével maguk a tanulók fedezték fel. Otthon papírból kellett kivágniuk egyenlőszárú derékszögű, derékszögű, egyenlő oldalú, egyenlő szárú, hegyes- és tompaszögű háromszögeket. Ezekből az órán kell olyan négyzetet, ill. téglalapot kirakni, amelynek a területét az alkotó háromszögek adatainak segítségével számítani tudjuk. A következőkben ezt mutatom meg.

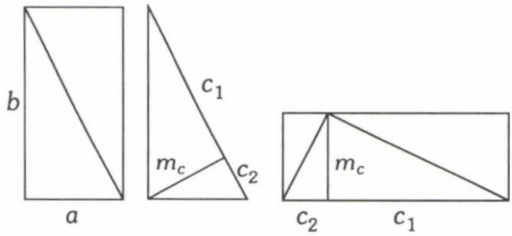
Egyenlőszárú derékszögű háromszög:



$2 \cdot T = a \cdot a$

(Itt fel lehet hívni a figyelmet, hogy az átfogó és az átfogóhoz tartozó magasság felhasználásával is próbálkozzanak.)

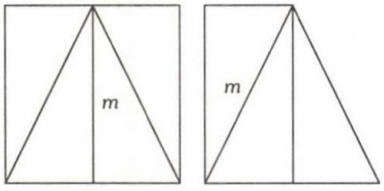
Derékszögű háromszög:



$2 \cdot T = a \cdot b$

(Itt már maguk is igyekeztek más lehetőségeket is figyelembe venni.)

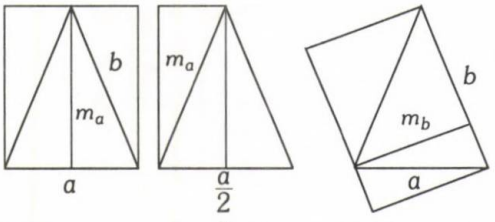
Egyenlő oldalú háromszög:



$2 \cdot T = a \cdot m$ $\quad T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot m$

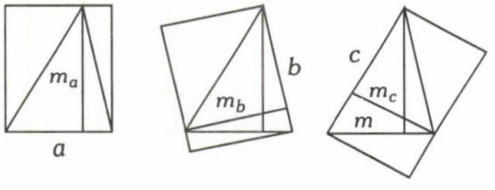
(A manipuláció, az eredmény megfogalmazása és az ábra elkészítése után meg kell vizsgálni, hogy más lehetőség nincs.)

Egyenlőszárú háromszög (először csak hegyesszögű):



$2 \cdot T = a \cdot m$ $\quad T = \frac{a}{2} \cdot m$ $\quad 2 \cdot T = m_b \cdot b$

Általános háromszög (először csak hegyesszögű):

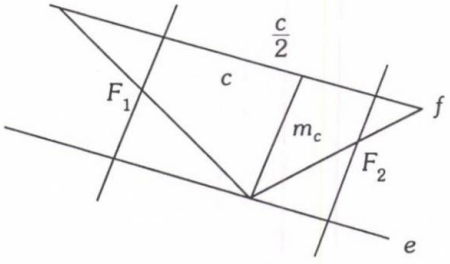


$2 \cdot T = a \cdot m_a$ $\quad 2 \cdot T = b \cdot m_b$ $\quad 2 \cdot T = c \cdot m_c$

Így fedezték fel a tanulók, hogy a különböző átrendezés ugyanazt az eredményt kell adja (hiszen ugyanazt a háromszöget daraboltuk át), ezért bármelyik oldalt és a hozzátartozó magasságot választhatják (azaz: bármelyik oldal és a – hozzá tartozó – magasság szorzata ugyanaz).

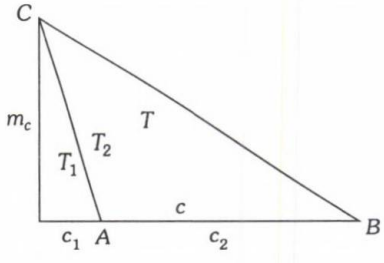
Az ábrákat a tanulók természetesen a füzetükbe is berajzolták. Itt nagyon kell ügyelni (ellenőrizni), hogy a több hasonló ábra helyesen tükrözze a végzett műveleteket (feliratozás, mozgások stb.) A rajzolásnál törekedni kell a szerkesztő eszközök következetes és helyes használtatására is.

Általános tompaszögű háromszög ($e \| f$ és F_1, F_2 oldalfelező pontok):



(Ha az oldalhoz tartozó magasság a háromszög belsejébe esett, nem volt probléma az átalakítás. Az ábrázolt megoldás az osztály – igaz, átlagosnál jobb képességű – tanulójának a javaslata.)

Ha az oldalhoz tartozó magasság a háromszögön kívül van, akkor a feladatot a derékszögű háromszög (már megismert) területének kiszámítására vezetjük vissza (ez már nem területátdarabolás, illetve mozgatás, így más logikai szintet jelent).



$T_1 + T = T_2$

$\frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot m + T = \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot m$, ebből:

$T = \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot m - \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot m =$

$= \frac{1}{2} \cdot (c_2 - c_1) \cdot m = \frac{1}{2} \cdot c \cdot m$

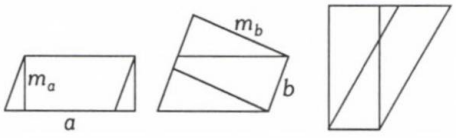
Az (otthon) előre kivágott háromszögek magasságainak berajzolását, az oldalak és magasságok megbetűzését már az órán végezték a tanulók. Ezek után történt a háromszögek szétvágása és a négyzet, ill. téglalap kirakása.

A tanulók természetesnek tartották, hogy az egybevágó síkidomok területe egyenlő és a mozgás során a terület nem változik. Az ilyen – számukra – trivialitásokban való „elmélyedés" felesleges, sőt káros!

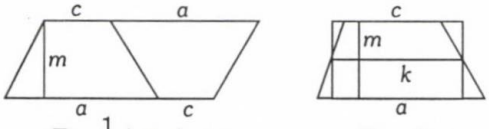
A háromszögterület általános, szövegesen és formulával történő megfogalmazása után kerül sor a más négyszögek (paralelogramma, trapéz, deltoid) területének meghatározására. A cél, illetőleg a módszer itt is a területátdarabolás, de más – lehetőleg a tanulóktól származó – ötleteket is felhasználhatunk.

A lehetőségek egy részét az alábbi ábrák mutatják.

Paralelogramma:



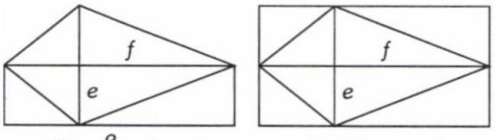
Trapéz



$T = \frac{1}{2}(a+c) \cdot m$ $\qquad$ $T = k \cdot m$

(A két módszer egybevetése lehetőséget ad a trapéz középvonalásának értelmezésére is.)

Deltoid:



$T = \frac{e}{2} \cdot f$ $\qquad$ $2 \cdot T = e \cdot f$

A területképletek megfogalmazása után a tanulóknak önállóan kellett válaszolni arra a kérdésre, hogy milyen közös tulajdonsággal rendelkezik a rombusz, a négyzet, a deltoid. *Felhasználható-e a közös tulajdonság a (közös) területképlet megalkotásához?*

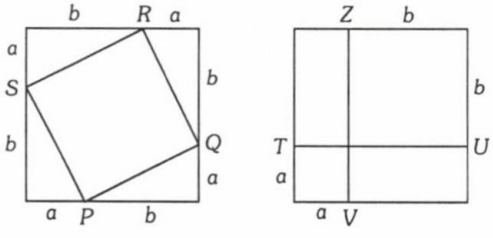
A válaszok alapján jutottunk a $T = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ képlethez. Innen már azonnal adódott a kérdés: *ha egy (konvex) négyszög átlói merőlegesek egymásra, számítható-e a területe az átlókból?*

A megoldáshoz vezető úton a rajzkészítés jelentette az első akadályt, mert természetes módon először a négyszöget próbálták megrajzolni, de akkor az átlók nem lettek merőlegesek egymásra. Mások deltoidot rajzoltak. Segítséget adott az a tanács, hogy először az átlók egyenesét rajzolják meg, hogy merőlegesek legyenek egymásra. (Ezzel példát láthattak arra, hogyan lehet a célnak megfelelő ábrát készíteni.) Innen már természetes volt a deltoidnál alkalmazott első módszer. Úgy gondolom, hogy ez az önmagában nehéz feladat ilyen úton történő megoldása már nyolcadik osztályban is lehetséges.

Közösen oldottuk meg a Matematika összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek (MOZAIK Oktatási Stúdió) 2451. és 2470. feladatokat. Itt is olyan téglalappá lehetett kiegészíteni a síkidomokat, amelyek területe könnyen számítható, ha egy kis négyzet területe a területegység. Ezekkel elő lehet készíteni a koordinátageometriai területszámítási feladatok megoldását.

A számolásokhoz szükség volt Pithagorasz tételére, ezért került sor ennek tanítására, az ismert átdarabolásos bizonyításával együtt, amely tökéletesen illeszkedik az eddigiekhez.

Az órán felrajzoltuk a két $a + b$ oldalhosszúságú négyzetet és a *PQRS* négyszöget, illetve a *TV* és *UZ* szakaszokat.

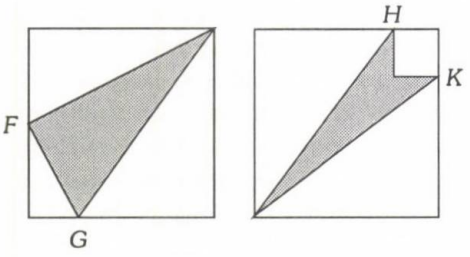


A tanulóknak otthon kellett mindkét négyzetből azokat a részeket kivágni, amelyek egyenlő területűek. Így a bizonyítás lényegét tulajdonképpen önállóan végezték el, és szinte „maguktól" jutottak a tétel állításához. Természetesen azt is be kellett látni, hogy a *PQRS* négyszög valóban négyzet.

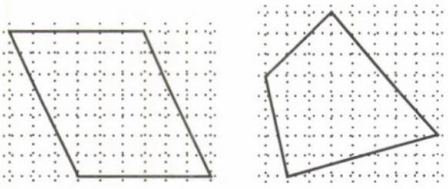
Ezzel a bizonyítási igény is felkelthető a tanulókban. (Szakköri feldolgozásra javasolható, hogy Pithagorasz tételének Bhászhara-féle geometriai bizonyítását végezzék el átdarabolással.)

A módszer eredményességét úgy tudtam lemérni, hogy dolgozatban konkrét számítási feladatok mellett a következők is szerepeltek:

1. Hányad része a bevonalkázott síkidom területe a négyzet területének, ahol F felezőpont, G, H, K negyedelőpontok?



2. Mekkora a berajzolt síkidom területe, ha a kis négyzet területe egységnyi?



Az első feladatot a tanulók 65 %-a, a másodikat 62 %-a oldotta meg hibátlanul.

A sokszögek területszámításának egyik fontos alkalmazási területe a poliéderek felszínének számítása. A cél ismét a tanulók közvetlen tapasztalatszerzése volt. Ennek eszköze az önálló modellkészítés, amelynek segítségével a térszemlélet is fejleszthető.

Az órán, vagy otthon mindenki megrajzolta az adott testek hálóját (ezzel a témával már találkoztak az előző tanévben), ezekből összehajtogatta a testet, de nem ragasztotta össze, hogy a hálót később is használhassa. (Így minden alkalommal történt szemléltetés, a sík- és térbeliség összekapcsolása.) Már az egyik legegyszerűbb poliéder, a kocka hálójának rajzolásakor kiderült, hogy a hat darab négyzetet sokféleképp helyezhetjük el úgy, hogy abból a test felépíthető (összehajtogatható) legyen. Sokféle testet készítettünk így el (kocka, téglatest, szabályos sokszög alapú hasábok, gúlák stb.)

A test hálójának különféle elrendezése lehetőséget adott arra, hogy megkeressük a „leggazdaságosabb" elrendezést. (Ezen azt értettük, hogy kivágásnál legkevesebb legyen a hulladék, azaz: a legkisebb területű téglalapból legyen kivágható a háló.) A szabályos tetraéder hálójának elkészítésekor már sokan alkalmazták azt a módszert, hogy az élhossz kétszeresével rajzolt egyenlő oldalú háromszög középvonalai adják a tetraéder éleit. Ez utóbbi módszert használva általános hegyesszögű háromszög esetén olyan tetraédert származtattunk, melynek lapjai egybevágók, tehát egyenlő területűek, de nem szabályos háromszögek.

A téma befejezésekor írt dolgozatban az alábbi feladatok (is) szerepeltek:

1. *a*) Egy téglatest élei 2, 3, 4 cm hosszúak. Rajzold le a hálóját, számítsd ki a felszínét, határozd meg az élek, lapok, csúcsok számát is!

1. *b*) Egy négyzetes oszlop alapéle 4 cm, oldaléle 6 cm. Készítsd el a hálóját, számítsd ki a felszínét, add meg az élek, lapok, csúcsok számát is!

2. *a*) Egy téglalap alapú egyenes gúla alaplapjának élei 6 és 7 cm, oldaléle 7 cm hosszú. Rajzold le a hálóját, számítsd ki a felszínét, add meg az élek, csúcsok, lapok számát is!

2. *b*) Egy egyenes gúla alaplapja egyenlő oldalú háromszög, amelynek oldala 9 cm. Az oldallapok olyan egyenlő szárú háromszögek, melyeknek szára 6 cm. Rajzold le a hálóját, számítsd ki a felszínét, határozd meg az élek, csúcsok, lapok számát is!

A feladatokat a tanulók 80%-a oldotta meg jól. (átlag!).

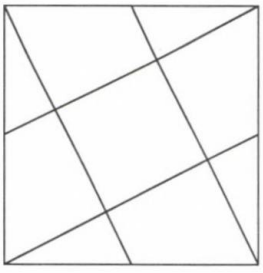
A területdarabolás módszere alkalmat adott arra, hogy más módon nehezen megoldható feladatok megoldására is vállalkozzunk (pl. szakköri munkával). Ilyenek:

(G.fgy.I.1507. – Geometriai feladatgyűjtemény I.k. 1507. feladat) Tetszőleges konvex négyszög csúcsain át húzzunk párhuzamosokat

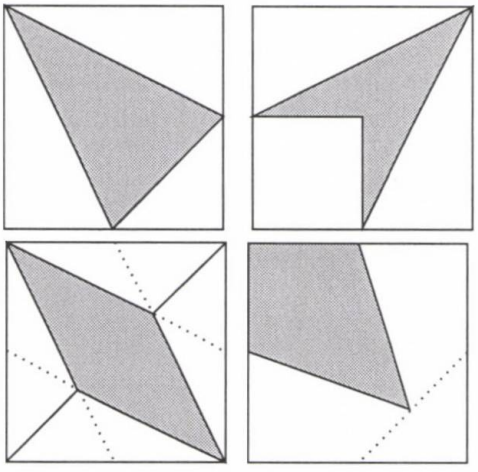
az átlókkal. Igazoljuk, hogy a négyszög köré írt paralelogramma területe a négyszög területének kétszerese!

(G.fgy.I. 1500.) Egy paralelogramma egyik szögpontját kössük össze az egyik szemközti oldal felezőpontjával. Igazoljuk, hogy az így keletkezett háromszög területe negyedrésze a paralelogramma területének!

(G.fgy.I. 1522.) Kössük össze a négyzet csúcsait a szemközti oldalak felezőpontjával. Hányad része a négyzet közepén így körülzárt kis négyzet területe az eredeti négyzetének?

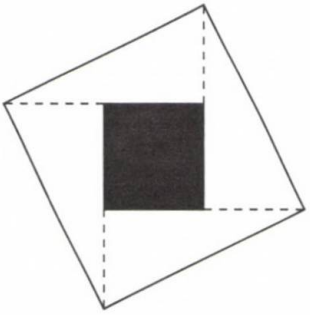


(M.ö.fgy. 2484. – Matematika összegfoglaló feladatgyűjtemény 2484. feladat) Az ábrán látható vonalkázott síkidomok területe hányad része a négyzet területének?



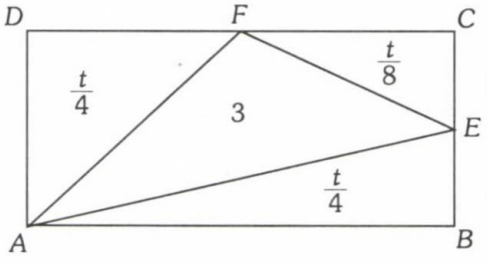
Ezek közül az *a)* és *b)* feladatokat az osztályban is sikeresen meg lehetett oldani.

(M.ö.fgy. 2479.) Egy négyzet oldalait az ábrán látható módon kétszeresére hosszabbítottuk. Igazoljuk, hogy a végpontok összekötésével kapott síkidom négyzet! A kapott négyzet területe hányszorosa az eredeti négyzetének?



Néhány további feladat (és megoldásvázlatuk), amelyek megoldhatók területátdarabolással, ill. síkidom területének részekre bontásával.

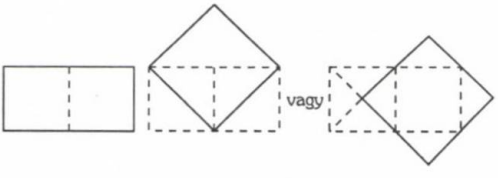
1. Az *ABCD* téglalap *BC* oldalának felezőpontja *E*, a *CD* oldal felezőpontja *F*. Az *AEF* háromszög területe 3 területegység. Mekkora a téglalap területe?



A téglalap területe kifejezhető a részsíkidomok területével:

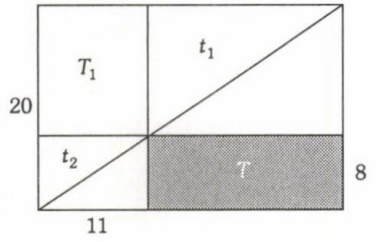
$$t = \frac{t}{4} + \frac{t}{4} + \frac{t}{8} + 3 \qquad t = 8$$

2. Egy téglalap hosszabbik oldala kétszerese a kisebbik oldalnak. Ezt a téglalapot vágd szét részekre úgy, hogy azokból négyzetet lehessen összerakni!



3. Egy téglalapot két, az oldalakkal párhuzamos, egymást az egyik átlón metsző egyenessel az ábra szerint felosztottunk. A megadott

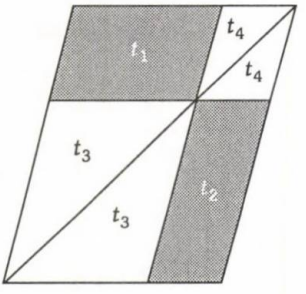
távolságok alapján határozd meg a vonalkázott téglalap területét!



$T = 11 \cdot (20 - 8) = 132$
$t_2 + T + t_1 = t_2 + T + t_1$
$T_1 = T$

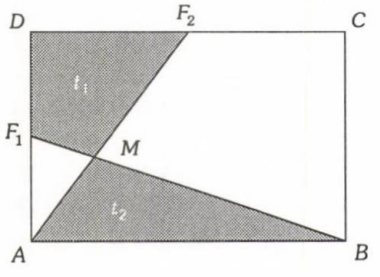
4. Mutassuk meg, hogy a vonalkázott területek egyenlők!

a) (A paralelogramma átlójának egy pontján át párhuzamosokat húztunk az oldalakkal.)



$t_3 + t_1 + t_4 = t_4 + t_2 + t_3$
$t_1 = t_2$

b) (F_1 és F_2 oldalfelező pontok)



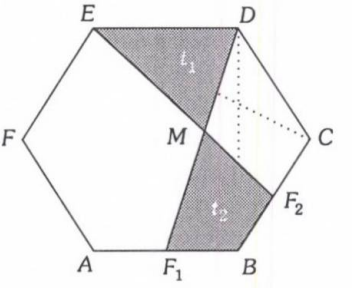
$t(i)$ jelentse az i sikidom területét;

$$t(ABF_1) = \frac{t(ABCD)}{4}$$

$$t(AF_2D) = \frac{t(ABCD)}{4}$$

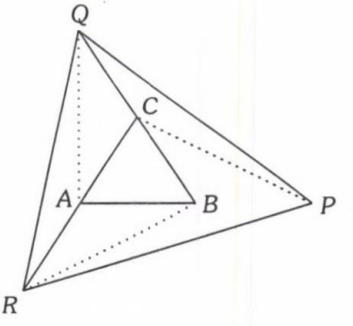
$t_1 = t(AF_2D) - t(AMF_1)$
$t_2 = t(ABF_1) - t(AMF_1)$
$t_1 = t_2$

c) (F_1 és F_2 oldalfelező pontok, a hatszög szabályos)



$t(F_1BCD) = t(F_1BD) + t(BCD)$
$t(F_2CDE) = t(F_2CE) + t(CDE)$
$t(F_1BCD) = t(F_2CDE)$
$t_2 = t(F_1BCD) - t(F_2CDM)$
$t_1 = t(F_2CDE) - t(F_2CDM)$
$t_2 = t_1$

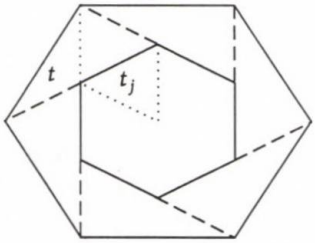
5. Egy szabályos háromszög minden oldalát meghosszabbítottuk a háromszög oldalának hosszával az ábrán látható módon, majd a végpontokat összekötöttük. Hányszorosa a kapott egyenlő oldalú háromszög területe az eredeti háromszög területének?



A PQR háromszöget felbontottuk az ábrán látható módon 7 háromszögre. Ezek területe egyenlő az ABC háromszög területével, így $t(PQR) = 7 \cdot t(ABC)$

6. Egy szabályos hatszög mindegyik oldalát meghosszabbítottuk a hatszög oldalának hosszával az ábrán látható módon, majd

a végpontokat összekötöttük. Hányszorosa a kapott szabályos hatszög területe az eredetinek?

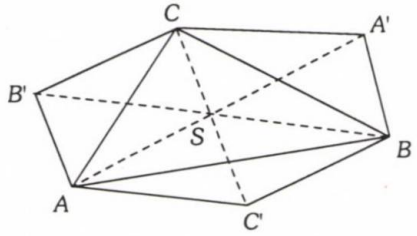


A belső hatszög területe:
$T_1 = 6 \cdot t_1$
A külső hatszög területe:
$T = T_1 + 6(t_1 + t) = 6 \cdot t_1 + 6 \cdot t_1 + 6 \cdot t =$
$= 18 \cdot t_1$ (mivel $t_1 = t$) így: $T = 3 \cdot T_1$

Annak szemléltetésére, hogy érdemes és szükséges a területátalakítással minél korábban foglalkozni, két felvételi feladatot mutatok be, amelyeknek a megoldásához az egyenlő területek felismerése vezet.

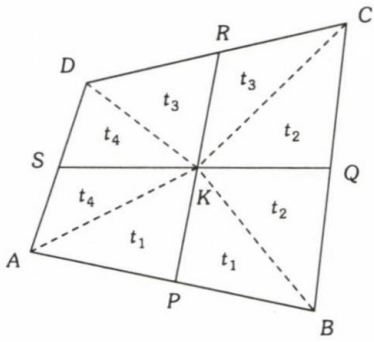
7. Az ABC háromszög oldalai legyenek: $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$. Tükrözzük a háromszög csúcsait a súlypontra, az így kapott pontok legyenek: A', B', C'. Mennyi az AC' BA' CB' hatszög területe? (1995. év felvételi feladata.)

$BSAC'$ paralelogramma, $t(BAC') = t(BSA)$



$BA'CS$ paralelogramma, $t(BA'C) = t(BCS)$
$ASCB'$ paralelogramma, $t(ACB') = t(ASC)$
$t(AC'BA'CB') = 2(t(BSA) + t(BCS) + t(CAS)) =$
$= 2 \cdot t(ABC)$

8. Egy konvex négyszög szemközti oldalainak középpontjait összekötve az négy négyszögre bontható. Ha ezek közül háromnak a területe 8, 16, illetve 20 területegység, akkor mekkora a negyedik négyszög területe? (1995. év felvételi feladata.)



$t(APKS)+t(CRKQ)=t(BQKP)+t(DSKR)=$
$= t_1+ t_2+ t_3+ t_4$ legyen: $t(APKS)= t_1+ t_4 = x$
Ha $t_3 + t_2 = 8$, $t_4 + t_3 = 16$ és $t_1 + t_2 = 20$
akkor $x + 8 = 16 + 20$, így $x = 28$
Ha $t_3 + t_2 = 16$, $t_4 + t_3 = 8$ és $t_1 + t_2 = 20$
akkor $x + 16 = 8 + 20$, így $x = 12$
Ha $t_3 + t_2 = 20$, $t_4 + t_3 = 8$ és $t_1 + t_2 = 16$
akkor $x + 20 = 8 + 16$, így $x = 4$

További igen érdekes, tanulságos és jól használható feladatok találhatók pl. a Szakköri feladatgyűjteményben, amely az **ABACUS-füzetek** sorozatban jelent meg.

Köszönöm Dr.Hörváth Jenőnek, a Soproni Erdészeti és Faipari Egyetem Matematikai Intézetvezető professzorának, hogy ösztönzésével és pedagógiai tanácsával segítette a cikk megírását.

Irodalom

[1] Horvai-Reimann: Geometriai feladatok gyűjteménye. Tankönyvkiadó, Bp.1970.
[2] Kárteszi: Szemléletes geometria. Gondolat K. Bp.1966.
[3] Korányi: Matematika 13 éveseknek (tankönyv) Nemzeti Tankönyvkiadó.
[4] Korányi: Matematika 13 éveseknek (gyakorlófüzet) Nemzeti Tankönyvkiadó.
[5] Korányi: Matematika 14 éveseknek (tankönyv) Nemzeti Tankönyvkiadó.
[6] Korányi: Matematika 14 éveseknek (gyakorlófüzet) Nemzeti Tankönyvkiadó.
[7] Kosztolányi ...: Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged 1994.
[8] Kutuzov B.V.: Geometria Tankönyvkiadó. Bp.1954.

MOZAIK
MÓDSZERTANI NAPOK

SZEGED, november 24. · VESZPRÉM, december 1.
ZALAEGERSZEG, december 2. · BUDAPEST, december 8.
SZOLNOK, január 7. · NYÍREGYHÁZA, január 8.
BUDAPEST, január 12.

'98

ALSÓ TAGOZAT	MAGYAR NYELV – ERKÖLCSTAN	MATEMATIKA	SZÁMÍTÁSTECHNIKA – KÖNYVTÁRHASZNÁLAT	FIZIKA	BIOLÓGIA – KÉMIA	FÖLDRAJZ
GALGÓCZI LÁSZLÓNÉ/ ALBERTNÉ DR. HERBSZT MÁRIA *Anyanyelv, kommunikáció, szövegalkotás* (Anyanyelvi tankönyvcsalád kisiskolásoknak) **BALKOVITZNÉ CYNOLTER MAGDOLNA** *Szöveg- és versértelmezés alsó tagozatban*	**LERCHNÉ DR. EGRI ZSUZSA** *Az ismeretek alkalmazása és új ismeretek 7. osztályban* **BALOGHNÉ MAKÓ TERÉZ** *Az új tantárgy: az emberismeret-erkölcstan tanításának kérdései* (Embertani-erkölcstani munkatankönyv 4-8. osztály)	**VINCZE ISTVÁN** *Stratégiák, döntések, valószínűség az általános iskolában* **KOSZTOLÁNYI JÓZSEF** *Az aktivitás öröme a matematika tanulásában*	**ROZGONYI-BORUS FERENC** *A számítástechnika korszerű tanítása* (Informatika tankönyvcsalád 5-10. osztály) **KOKAS KÁROLY** *Klasszikus könyvtár és modern információs technológiák* (Informatika-könyvtárhasználat 5-8. oszt.)	**HALÁSZ TIBOR** *Haladó mozgás, energiaváltozás* **MISKOLCZI JÓZSEFNÉ** *A mechanika és a hőtan módszertani kérdései*	**JÁMBOR GYULÁNÉ** *Tankönyveink és a tanulás tanítása* **SIPOSNÉ KEDVES ÉVA** *Pillantás a szervetlen kémia anyagainak világába*	**VÍZVÁRI ALBERTNÉ** *A földrajzi ismeretek egymásra épülése és a tantervi követelmények* **MAKÁDI MARIANN** *Képességfejlesztés a természetismeret tanításában* (A Föld, amelyen élünk - természetismeret 5-6. osztály)

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 47-01-01, 470-052
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Cabri-geometria – segítőtárs a geometria tanulásában

(Ambrus Gabriella)

A matematikatanítás fejlődése Észtországban

(Dr. Tiit Lepmann)

Új didaktikai és erkölcsi dilemmák a matematika egyetemi oktatásában

(Vizvári Béla)

Beszámoló az I. Vajdasági Magyar Matematika Versenyről

(Bunyik Zoltán)

VI. ÉVFOLYAM 1998 5

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelő szerkesztő: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 780 Ft.
A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium és a Soros Alapítvány támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
a Szegedi Kossuth Nyomdában
Felelős vezető: Gera Imre

TARTALOM

Cabri-geometria – segítőtárs a geometria tanulásában
Ambrus Gabriella, Budapest

A matematikatanítás fejlődése Észtországban
Dr. Tiit Lepmann, Tartu

Új didaktikai és erkölcsi dilemmák a matematika egyetemi oktatásában
Vizvári Béla, Budapest

Beszámoló az I. Vajdasági Magyar Matematika Versenyről
Bunyik Zoltán, Újvidék

Egy újabb franciaországi érettségi feladatsorozat
Honti Dénes, Győr

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 6-8 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés).

A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézések név és évszám jelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalmak alfabetikus sorrendben készüljenek.

Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében személyi számukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Ambrus Gabriella

Cabri-geometria – segítőtárs a geometriatanulásban

„A megismerés folyamatában és az intelligencia fejlesztésében a tevékenység döntő jelentőségű. Ezért fontos, hogy az oktatásban olyan eszközök, rajzos ábrák, ill. írásos segédanyagok szerepeljenek, amelyeken a tanulók ténylegesen vagy gondolatok révén tevékenykedhetnek, és „kutatásokat" végezhetnek. A médiáknak önmagukban csak alárendelt jelentőségük van. Elsődlegesen a rajtuk végzett tevékenységek a lényegesek. Az olyan médiák, amelyeken nem lehet „dolgozni", azaz csak nézhetők, nem igazán értékesek."

(E. Ch. Wittmann)

Magyarországon 1998-ban került forgalomba Cabri-geometria néven a Franciaországban Grenoble-ban már korábban kifejlesztett – ott Cabri I néven ismert – program. Ez is az ún. dinamikus, interaktív geometriaprogramok körébe tartozik, így akik már találkoztak ilyen típusú programokkal, pl. Thales, Geolog, bizonyosan sok hasonlóságot fedeznek fel.

A Cabri-geometria – továbbiakban röviden Cabri – kutatók és tanárok együttműködésével készült, és a program fejlesztése jelenleg is folyik. A Cabri II változat már évek óta forgalomban van több külföldi országban.

A program használata 12-13 éves kortól ajánlható, de a tapasztalatok azt mutatják, hogy már korábban is alkalmazható a geometria tanításban.

A Cabri, akárcsak általában a tanítást-tanulást segítő egyéb szoftverek, nem a tanárt akarja helyettesíteni a tanítás során, hanem új lehetőségeivel az ismeretek elmélyítéséhez, a geometria jobb értéséhez, és nem kevésbé a tárgy iránti érdeklődés fokozásához kíván hozzájárulni.

A program ismertetésére itt nem vállalkozom, ez természetesen nem is lehetséges. Az [1] ezt részletesen, bőséges feladatanyaggal megteszi. (Az említett könyv a programmal együtt kapható.) A továbbiakban a program néhány olyan sajátosságát szeretném kiemelni, amely részben feladatok megoldását segíti elő, másrészt új típusú problémakezelést tesz lehetővé.

Amikor geometriafeladatot oldunk meg, a következő két terület között teremtünk kapcsolatot:

Leírás		*Rajz*
megfogalmazom szavakkal, miről van szó – így azonban néhány geometriai összefüggés feltáratlan marad	⇔	megpróbálom lerajzolni a problémát – ez a rajz azonban szükségképpen speciális, nem kezeli például az a összes lehetőséget

A Cabri e két terület szorosabb összekapcsolását teszi lehetővé, ugyanis a Cabri-val készített ábra a geometriai kapcsolatok ábrája.

A Cabri-val is lehet rajzolgatni, sőt tanulságos is, de ha azt akarjuk, hogy bizonyos tulajdonságok megmaradjanak ábránkon, akkor tudatosan kell megválasztanunk a lépéseket alakzatunk létrehozásához.

– Nem mindegy például már az sem, hogyan szerkesztünk kört.

Ha a LÉTREHOZÁS/ALAPKÖR menüpontot választjuk, akkor állandó sugarú, az egész képernyőn mozgatható körvonalat kapunk, melynek középpontját a SZERKESZTÉS/KÖR KÖZÉPPONTJA utasítással adhatjuk meg.

Ha viszont a LÉTREHOZÁS/KÖR (KÖZÉPPONT+PONT) menüpontot választjuk, akkor a kör középpontja, ill. a körön megadott pont mozgatásával a kör sugarát változtathatjuk.

(A mozgatás a kéz alakú kurzor segítségével történik, amely az egér lenyomásával jelenik meg a pontra mutatva.)

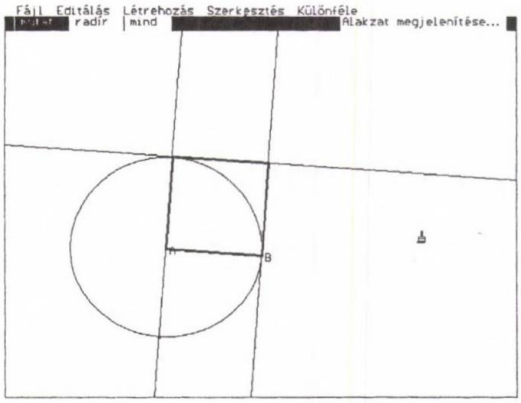
A következőkben a négyzetszerkesztés példáján szeretném bemutatni, hogyan változik eljárásunk annak megfelelően, milyen „tulajdonságú" ábrát szeretnénk készíteni.

1. Szerkesszünk négyzetet!

Ez az utasítás a Cabri-ban azt jelenti, hogy a kész ábra szabad pontjait mozgatva, az továbbra is négyzet marad, csak a méretei változnak. (A Cabri-ban vannak ún. szabad pontok, ezek a LÉTREHOZÁS menüsor segítségével adhatók meg, vannak ún. félszabad pontok, ezek bizonyos alakzaton mozognak SZERKESZTÉS/PONT AZ ALAKZATON, és vannak ún. kötött pontok, amelyek nem mozgathatók pl. SZERKESZTÉS/METSZÉSPONT.) Szerkesztési eljárásunk egyik lehetséges módja a következő:

a) szakasz felvétele, (LÉTREHOZÁS/SZAKASZ)
b) végpontjai legyenek ***A***, ***B***. (EDITÁLÁS/ALAKZAT ELNEVEZÉSE)
c) egyik végpontban (***A***) merőleges egyenes húzása (SZERKESZTÉS/MERŐLEGES EGYENES, majd először az ***A*** pontra mutatunk, majd a szakaszra)
d) A körül a szakasszal megegyező sugarú kör. (LÉTREHOZÁS/KÖR)
e) Metszéspont (SZERKESZTÉS/METSZÉSPONT, majd egymásután rámutatunk arra a két alakzatra, amelyeknek a metszéspontját kívánjuk megadni)
f) Az egyik metszésponton keresztül párhuzamos húzása a szakasszal, (SZERKESZTÉS/PÁRHUZAMOS)
g) ***B*** pontban merőleges egyenes a szakaszra.
h) E merőleges és az előbb húzott párhuzamos metszéspontját kijelöljük.

Ábránkat „szebbé" tehetjük, ha előbb a LÉTREHOZÁS/SZAKASZ menüpont segítségével megadjuk a négyzet oldalait, majd az EDITÁLÁS/ALAKZAT MEGJELENÍTÉSE menüpontot használjuk. Az 1. ábra a MUTAT/ECSET segítségével készült, rámutatva rendre a négyzet oldalaira. Négyzetünket ki is színezhetjük, ha a MUTAT-ból valamelyik színt választjuk. A segédvonalak eltüntetése a RADÍR használatával lehetséges.



1. ábra

2. Szerkesszünk négyzetet, amely forgatható a középpontja körül!

Ennél a szerkesztésnél érdemes egy körből kiindulni, majd egy pontját kijelölni (SZERKESZTÉS/ PONT AZ ALAKZATON), ez lesz a négyzet egyik csúcsa. Ennek a pontnak a segítségével a négyzet forgatható a középpontja körül. A kört akár el is rejthetjük az előbb ismertetett módon.

Érdekesen alakul a szerkesztés, ha a feladat a következő:

3. Szerkesszünk négyzetet, amely eltolható az egyik átló egyenesén!

Ennél a feladatnál célszerű először az átló egyenesét megadni (LÉTREHOZÁS/EGYENES 2 PONTRA), majd egy külön felvett szakaszt, mint átlót átmásolni erre az egyenesre.

Ennél a lépésnél gyorsíthatjuk munkánkat, ha a programban megtalálható makrók közül a szakaszmásolót használjuk. (KÜLÖNFÉLE/ MAKRÓK KEZELÉSE/ beolvasás, ekkor a MACROS utasítással megjelennek a programhoz tartozó kész macrók, és innen a LEN.(GHT) CAR.(RY) MAC. nevűt választjuk, ez a továbbiakban a SZERKESZTÉSEK menüoszlopban megtalálható lesz. (Használatánál először a másolandó szakaszra kell mutatni, majd az egyenes azon pontjára, ahonnan majd arra a pontra amilyen irányba kívánjuk a szakaszt másolni.)

A 2. és 3. esetben a szerkesztést már nem nehéz befejezni a Cabri segítségével.

4. Adjunk meg olyan négyzetszerkesztést, amelyet makrósítva, négyzetekkel parkettázhatjuk a síkot!

A makrókészítés fortélyainak megismerésével, ld. [1], ez sem nehéz, sőt érdemes rombuszszal is próbálkozni. Ez utóbbi esetben szerkesztésünk menete némileg bonyolultabbá válik.

Eddig olyan ábrákat készítettünk, amelyek a Cabri használatával voltak kapcsolatban.

A Cabri azonban természetesen ennél többre használható. Készíthetők ugyanis érdekes, ún. „trükkös" ábrák, amelyeknek egy igen egyszerű változatát mutatom be az alábbiakban:

a) Vegyünk fel egy ***AB*** szakaszt
b) a középpontja legyen ***U*** (SZERKESZTÉS/ FELEZŐPONT)
c) Vegyünk fel egy ***B*** középpontú, ***U***-n átmenő kört.
d) Legyen ***M*** a kör egy pontja.
e) Szerkesszen ***M***-n át merőlegest az ***AB*** szakaszra!
f) Metszéspont ***H***.
g) Rejtse el a merőlegest és a kört!
h) Húzza be az ***MH*** szakaszt!

Mozgassa ***M*** pontot, és figyelje meg, mi történik!

Megfigyelések, sejtések megfogalmazásához segít a Cabri a következő feladatokban: Mértani hellyel kapcsolatos a következő:

– A mértani hely funkció segítségével adja meg azon pontok halmazát a síkon, amelyekből adott szakasz 90°-os szög alatt látszik! Végezze el a feladatot tetszőleges α szög esetén is!

Az első esetben a következőképpen járhatunk el:

Felvesszük a szakaszt, az egyik végpontjában felveszünk egy egyenest (LÉTREHOZÁS/ EGYENES 2 PONTRA), a szakasz másik végpontjából merőlegest húzunk erre az egyenesre. A két egyenes metszéspontja legyen ***P***.

A mértani hely megrajzolásához a SZERKESZTÉS/ MÉRTANI HELY menüpontot hívjuk be. Ezután először a ***P***-re mutatunk, majd a 2 ponton átmenő egyenes szakaszvégponttól különböző pontját mozgatva (az egér gombját lenyomva tartva) megjelenik a ***P*** pontok mértani helye.

Szép ábrát készítettünk, de a mértani helyet sajnos nem tudjuk kinyomtatni, mert bármely további menüpont csak a MÉRTANI HELY TÖRLÉSE után érhető el ismét.

A feladat második részének kidolgozását az olvasóra bízzuk.

A Cabri alkalmazásával azonban lehetővé válik korábbi problémák újszerű átfogalmazása is, erre példa a következő feladat, amely sok helyen Varignon probléma néven ismert:

Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg!

A feladatot a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

1. Vegyünk fel egy négyszöget, vizsgáljuk annak a négyszögnek a tulajdonságait, amelyet az eredeti négyszög oldalfelező pontjai határoznak meg!

Ennél talán érdekesebb a következő problémamegadás:

2. Vegyünk fel egy négyszöget, és egy *A* pontot. Tükrözzük *A*-t rendre a négyszög csúcsaira. (SZERKESZTÉS/PONT TÜKRÖZÉSE), jelöljük az így kapott pontokat A_1, A_2, A_3, A_4-gyel. Vizsgáljuk meg azokat az eseteket, amikor *A* és A_4 pontok egybeesnek!

A háromszög oldalfelező merőlegeseinek vizsgálatánál a Cabri lehetővé teszi például a következő lehetőséget is:

Vegyünk fel egy kört, rajta három pontot (LÉTREHOZÁS/ALAPKÖR SZERKESZTÉS/ PONT AZ ALAKZATON). Húzzunk meg húrokat a körben, amelyeknek végpontjai a három pontból valók, majd ezek felezőmerőlegeseit (METSZÉSPONT (!)). A felezőmerőlegesek metszéspontja láthatóan mindig átmegy a kör középpontján. Ennek indoklásául hivatkozni lehet a kör szimmetriájára.

Ha megrajzoljuk a harmadik, megadott pontokat összekötő húrt, ennek a felezőmerőlegese is átmegy a kör középpontján, szintén az előbbiek miatt.

Ezen a ponton érdemes megfogalmazni eddigi eredményeinket, majd továbbléphetünk:

Az egyik pontot „vegyük le" a körről (KÜLÖNFÉLE/KAPCSOLATOK TÖRLÉSE), és vizsgáljuk a szakaszfelező merőlegesek metszéspontját e pont mozgatásával.

Ez a vizsgálati mód elősegítheti a megfigyelés bizonyítását is (3. ábra).

Természetesen azt is megtehettük volna, hogy háromszöget veszünk fel (LÉTREHOZÁS/HÁROMSZÖG), meghúzzuk a szakaszfelező merőlegeseket, és vizsgáljuk ezek viszonyát a háromszög csúcsainak mozgatásával.

Az első vizsgálati módszernek azonban számos előnye van. Például az is, hogy további kérdéseket tehetünk fel, ill. talán úgy is mondhatjuk: az ábra alapján további kérdések adódnak, például:

– Megmarad-e az oldalfelező merőlegesek tulajdonsága, ha a háromszög helyett más sokszöget veszünk fel a körben? Miért?

– Mi történik, ha ezekben az esetekben az egyik csúcsot elmozdítom a körvonalról? Miért?

Az említett példák csak néhányat mutatnak be a Cabri adta lehetőségekből, de talán bevezetőnek, továbbgondolásra ennyi is elég.

A Cabri-val való dolgozás, kísérletek tanúsága szerint hat a gyerekek (és természetesen a tanárok) geometriához való viszonyára is. Semmiképpen sem elhanyagolható a számítógépen mozgatható ábrákkal való dolgozás motiváló ereje, azonban itt nem csupán erről van szó. Megfigyelések mutatnak rá arra, hogy a Cabri alkalmazása révén változás következik (következhet) be a geometriai ismeretek rendszerében is, a gyerekeknél. Erről szól az utolsó példa:

– Adott egy *d* egyenes, és rajta kívül egy *P* pont. Egyenes vonalzó és körző segítségével szerkesszünk párhuzamost *P*-n át, *d*-vel!

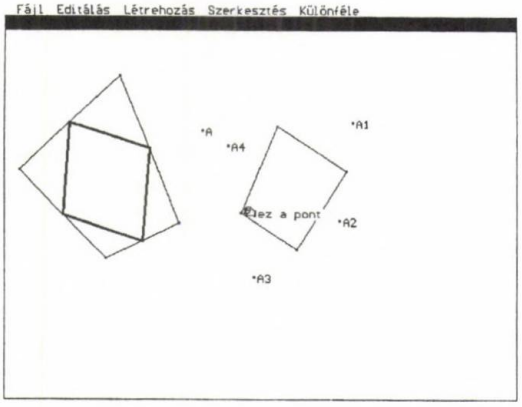
Akár tanár, akár diák találkozik ezzel a feladattal, nemigen gondol arra, hogy a megoldáshoz a háromszögek középvonaláról tanultakat használja. De a matematikai tartalmat vizsgálva, látható, hogy az említett ismeret és a feladat között kapcsolat áll fenn. Más szóval, a háromszögek középvonaláról tanultak alkalmasak arra, hogy ennek segítségével kidolgozzuk a megfelelő szerkesztési eljárást:

- Húzzunk (az egyenes vonalzó segítségével) egy ***P***-n átmenő egyenest, amely ***M*** pontban metszi d egyenest.
- Jelöljük ki (körző segítségével) az ***A*** pontot, amely a ***P*** pont ***M***-re vonatkozó szimmetrikus képe.
- Húzzunk ezután (a vonalzó segítségével) ***A***-n átmenő egyenest, amely ***d***-t az ***N*** pontban metszi.
- Végül jelöljük ki (körző segítségével) a ***Q*** pontot, amely az ***A*** pont szimmetrikus képe az ***N***-re vonatkozóan.

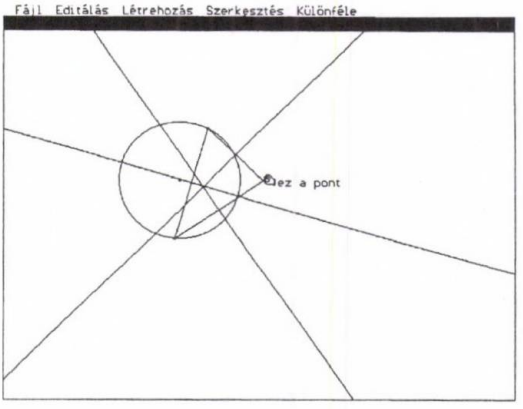
A ***P*** és ***Q*** pontokon átmenő a keresett egyenes.

Tehát klasszikus ismeretek eszközzé válhatnak, és ezek újabb, a szokásostól eltérő megoldásokhoz vezethetnek.

Minden előnye ellenére a Cabri felesleges, sőt káros is lehet, ha arra akarjuk használni,



2.ábra



3.ábra

amire nem való. Nem szabad például, hogy használatával teljesen leszoktassuk a gyerekeket a papír-ceruza szerkesztésekről, hogy a Cabrival szerzett tapasztalatok megbeszélés, bizonyítás nélkül maradjanak- ez utóbbin az adott kornak megfelelő szintű bizonyítást értem. Felesleges bonyolult ábrák készítése Cabri-ban, ha az adott probléma papír-ceruza rajzzal is jól vizsgálható.

Jó (lenne), ha a Cabri ill. a hasonló, oktatásban használható segítőprogramok folyamatosan jelen vannak (lennének) a tanórán, és indokolt esetben aktív szereplővé válnak (válnának).

Irodalom

[1] Cabri geometria, szerk.: Vásárhelyi Éva Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest 1998

[2] Cabriole (1-7) Lejournal des utilisateurs de Cabri-géometre Grenoble, France 1993-94

[3] A Cabri geometria szerk.: Török Turul (kézirat) Budapest

[4] Colette Laborde-Bernard Capponi: Cabri-géometre constituant d'un milieu pour 1'apprentissage de la notion de figure géometrique Recherches en Didactique des Mathématiques Vol.14. N 12. 1994

[5] Pászt Katalin: Cabri-geometria (geometria tanítása számítógépen, feladatsorokkal) szakdolgozat 1997, ELTE TFK

[6] Cabri-classe, apprendre la géometrie avec une logiciel (LSD2, IMAG, UJF, CNRS, Editions Archimede, novembre 1994)

[7] Colette Laborde: Probleme und Potentiale dynamischer Computerdarstellungen beim Lehren und Lernen von Geometrie (8. Internationales Symposium zur Didaktik der Mathematik, Klagenfurt, 1998)

[8] Reinhard Hölzl:Verifizieren oder Kontrastieren? Verwendungsweisen Dynamischer Geometrie-Software Beiträge zum Mathematikunterricht, 1998., 303-306. old. Franzbecker Verlag

Dr Tiit Lepmann

A matematikatanítás fejlődése Észtországban

Az első fontos dátum az észt iskolai matematikaoktatás történetében 1806. Ebben az évben jelent meg az első észt nyelvű matematika tankönyv, melyet Frey Heinrich Peter lelkész írt „A számolás művészete" címmel. A könyvre és a következő időszakra is jellemző az észt terminológia bevezetésének szükségessége. Még a négy alapműveletre – összeadás, kivonás, szorzás, osztás – sem volt megfelelő észt szakkifejezés.

Az észt nyelvű matematika tankönyvek kiadása a 19. század második felében növekedett. Jelentősebb tankönyvszerzők: Meyer, Schwartz, Gebhardt, Normann, Nerling, Kallas, Kapp és Tülk. A fentiekből kitűnik, hogy az iskolai matematikaoktatás úttörői németek voltak. Ez természetes, hiszen csak a lelkészek (akik németek voltak) tudása, ismeretei, szándéka és ideje tette lehetővé ilyen munkák megalkotását.

1880-ban kezdődött Észtországban az ún. oroszosítás periódusa. Eddig anyanyelven tanulhattak a gyerekek, ettől az évtől kezdve az elemi iskola első osztályától kezdve orosz nyelven folyt a matematika tanítása. Természetes következmény, hogy az észt nyelvű tankönyvek száma csökkent. Egy újabb fellendülésre csak az 1905-ös oroszországi forradalom után került sor. Ismét engedélyezték az anyanyelven történő oktatást. Szükségessé vált egy észt szakterminológia összeállítása a középiskolák számára. 1909-ben adták ki az első matematikai lexikont. E könyvben kb. 600 matematikai szakkifejezés szerepelt észt, német illetve orosz nyelven.

A következő jelentősebb változás 1918-ban történt, Észtország önállóvá vált. 1919-től észt

nyelven folyt az oktatás a Tartui Egyetemen. 1920-tól egy teljesen új iskolarendszert vezettek be Észtországban.

- Elemi iskola (6 osztály)
- Középiskola (5 osztály)
- Szakmunkásképző iskola (3 osztály)

A középiskola utolsó három osztályában több helyen speciális irányok voltak: természettudományi, humanisztikus, technikai, mezőgazdasági tagozatok. Az iskolakötelezettség 8 éves korban kezdődött és az elemi iskola befejezéséig tartott. A fejlődést az 1. táblázat illusztrálja.

1934-ben megváltoztatják e rendszert. A 7-9 osztályok neve Reáliskola, a 10-12 osztályok neve Gimnázium lett. A gimnáziumoknak volt egy humanisztikus és két természettudományos iránya. (matematika, fizika, illetve biológia, földrajz)

Az iskolai matematikaoktatás számára az első Észt Köztársaság időszaka nagyon gyümölcsöző volt. Csak 1920-ban például 10 új matematika tankönyvszerzővel találkozhatunk. A sok szerző miatt szükségessé vált e szerzők munkájának koordinálása. E célból alakult 1924-ben egy országos bizottság a matematikaoktatással kapcsolatban. A bizottság fő feladata egy új, modern matematika tanterv kidolgozása volt. Ettől az időszaktól kezdve olyan témák is szerepeltek az észt gimnáziumokban, mint *határérték, derivált, integrál, valószínűségszámítás, gömbi, analitikus illetve ábrázoló geometria elemei.*

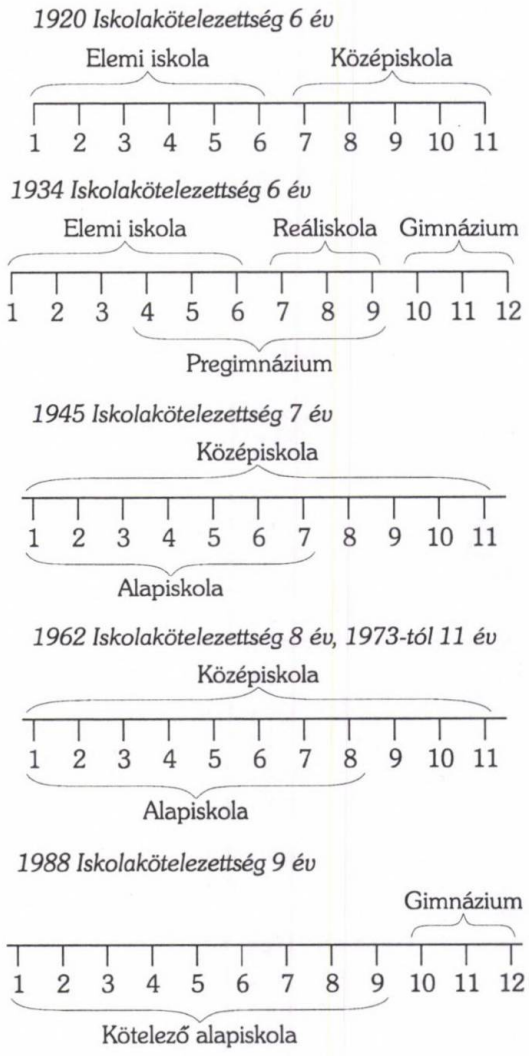
A bizottság a következő alapelveket dolgozta ki:

- A matematikát mint egységes diszciplínát kell tanítani.
- A függvény fogalmának fontos szerepet kell játszania az iskolai matematikaoktatásban.
- Át kell térni standard iskolai matematika tankönyvek használatára.

Sajnos a fenti elvek megvalósítására nem került sor. Észtország önállósága megszűnt. Az új hatalom nagyon leegyszerűsítette az iskolarendszert, a középiskola többféle specializálódási lehetőségei megszűntek. Egy egységes középiskola maradt, továbbá a szakmunkásképzés. A szovjet időszak alatti észtországi matematikaoktatásban öt szakasz különböztethető meg.

I. Az első években egységes matematika tankönyvhasználat volt a teljes Szovjetunió területén. E tankönyvek a múlt század végén készültek. Az önálló Észtország utolsó éveiben bevezetett modern fejezetek eltűntek a matematika tantervekből.

II. 1950-től kezdve csak matematika tankönyvfordításokat használtak az észt iskolákban. A matematika három részre volt osztva: Algebra, Geometria, Trigonometria. Mindegyik területnek külön tankönyve volt. Előfordult,



1. táblázat

hogy egy évfolyamnak hat matematikakönyve volt (a fenti három tankönyv és a kapcsolódó feladatgyűjtemények). E periódusban volt még egy jelentős esemény. 1954-ben szervezték Észtországban az első matematikai olimpiát, amelyet azóta minden évben hagyományosan megrendeznek. Ma három különböző szintje van: iskolai, kerületi és országos.

III. 1958-ban kezdődött az áttérés a saját tankönyvekre. Minden osztály részére új tankönyveket fejlesztettek ki, amelyekben elmélet és a hozzátartozó feladatok egységet képeztek. A tartalom természetesen megfelelt a teljes Szovjetunióban érvényes programnak. Bizonyos eltérések azért lehetségesek voltak. Az észt tankönyvek plusz témákat is tartalmaztak mint pl. határérték, derivált, integrál.

IV. 1965 óta csak észt nyelvű matematika tankönyvet használnak minden iskolában. Ebben az időben kezdődött meg az iskolai matematikaoktatás modernizálása. A halmazfogalom állt a reformmozgalom középpontjában. További jellemzők: a matematikai logika elemei, valószínűség számítás, statisztika. A legjelentősebb változás a Weyl féle axiómarendszerre épülő térgeometria bevezetése volt. Sajnos a reform sok aspektusa mind a tanulók, mind a tanárok számára nehéznek bizonyult. A formalizmus elterjedése a matematikaoktatásban kiváltotta a szülők és tanárok ellenállását. Szükségessé vált az iskolai matematika egyszerűsítése.

V. 1980 után a matematika-tananyag egyszerűsítése volt a szakdidaktikusok legfontosabb feladata Változások: a halmazfogalom elvesztette kulcspozícióját, a geometria axiomatikus felépítése helyére az analitikus geometria került. Azért mára is maradt tennivaló bőven.

Az 1980-as évek végén bekövetkezett önállósodási és demokratizálódási folyamatok után a következő jellegzetességei vannak matematikaoktatásunknak: túlzsúfolt program, túl magas és minden tanuló számára azonos követelmények, az elmélet túlsúlyos szerepe a matematika tankönyvekben. Ez meghatározza a feladatok minőségét is. Kevés mindennapi élettel kapcsolatos feladat szerepel a tankönyvekben.

A fentiek miatt matematikaoktatásunk nem kellő mértékben járul hozzá a tanulók szellemi fejlődéséhez, inkább a formális eredményekre koncentrál.

Észtország önállóvá válása után egy új oktatási reformot vezettek be. Egy 9 osztályos kötelező alapiskola van. Az alapiskola elvégzése után a tanulók gimnáziumban (10-12 osztály) illetve szakmunkásképző iskolában (3-4 év) folytathatják tanulmányaikat. A tanítandó matematikai anyag tartalma csökkent. Míg korábban az alapiskolában a matematika összóraszáma 47 volt hetenként, a mostani tanterv nagy szabadságot ad az iskoláknak: 33-tól 43-ig terjed a lehetséges heti óraszám matematikából. (Természetesen 9 osztályra vonatkoztatva.) (2. táblázat)

Iskolatípus	*I.*	*II.*	*III.*	*Összesen*
Osztály	1-3	4-6	7-9	
Heti óraszám összesen	9-13	12-15	12-15	33-43

2. táblázat

A matematika tanterv a 10- 12 osztályok számára is biztosít differenciálási lehetőségeket. A hivatalos tanterv szerint a gimnáziumok heti összóraszáma 35. Ebből 27 órára vonatkozólag a hivatalos állami tanterv határozza meg a tanítandó tartalmat. A maradék 8 órát az iskolák helyi tantervei szerint lehet kitölteni. Matematikából heti 3 óra a minimum, ezen háromórás kurzus neve alapkurzus. Az Oktatási Minisztérium egy bővebb, heti 5 órás kurzus programját is kidolgozta. Ez nem alkot annyira összefüggő rendszert, mint az alapkurzus tartalma. A 3. táblázat a fenti kurzusok által ajánlott témákat tartalmazza. Mindenegyes témára 35 tanítási óra áll rendelkezésre.

A 3. táblázatban lévő tanterv realizálására különböző tankönyvsorozatok állnak rendelkezésre. Míg a szovjet időben egyetlen tankönyvsorozat volt csak minden iskolatípusban, most a gimnáziumok részére három párhuzamos tankönyvsorozat áll rendelkezésre. Az 1-5. osztályok részére két párhuzamos matematika tankönyvsorozat van. E sorozatokat észt szerzők írták. Az orosz tannyelvű iskolák választhatnak az orosz nyelvre fordított észt matematikatankönyvek, illetve az Oroszországban kiadott tankönyvek közül. Érdemes megemlíteni, hogy a szovjet időszakban egyedül Észtországban

voltak használatosak anyanyelven írt, észt szerzők által alkotott tankönyvek.

Alapkurzus		*Bővített kurzus*	
X. Osztály			
AI.	Valós számok. Egyenletek, Egyenlőtlenségek.	BI.	Valós számok. Racionális és irracionális kifejezések.
AII.	Trigonometria.	BII.	Egyenletek, egyenlőtlenségek
AIII.	Vektorok a síkban. Görbék egyenlete.	BIII.	Trigonometria
		BIV.	Vektorok a síkban, görbék egyenlete.
		BV.	Tanár által választott téma.
XI. osztály			
AIV.	Sorozatok, függvények I.	BVI.	Sorozatok, függvények. I.
AV.	Függvények II.	BVII.	Függvények II.
AVI.	Határérték, derivált.	BVIII.	Határérték, derivált.
		BIX.	Derivált alkalmazásai.
		BX.	Tanár által választott téma.
XII. osztály			
AVII.	Valószínűségszámítás és statisztika	BXI.	Valószínűségszámítás és statisztika
AVIII.	Térgeometria, testek.	BXII.	Vektorok a térben. Analitikus geometria.
AIX.	Integrál.	BXIII.	Integrál.
		BXIV.	Térgeometria, testek.
		BXV.	Ismétlés

3. táblázat

Az észt matematikaoktatás perspektívái

Az Észt Oktatási Minisztériumban egy bizottság dolgozik az iskolai matematikaoktatás hatékonyságának javításán. A bizottság feladata az iskolai oktatási anyagok recenziója, az iskolai matematikaoktatás vizsgálata, módszertani és didaktikai javaslatok kidolgozása és eljuttatása a tanárokhoz, a matematikaoktatás eredményességének vizsgálata. A 3. és 6. osztály végén országos felmérést szervez a bizottság (nem minden iskolában). A felmérő dolgozatok javítása és elemzése a bizottság feladata. A 9. osztály végén minden tanuló számára kötelező vizsga van matematikából. E vizsga feladatait is ez a bizottság állítja össze. A dolgozatokat viszont a tanárok javítják és osztályozzák.

A gimnázium végén minden tanulónak öt tárgyból kell érettségi vizsgát tennie, ebből 3 tárgy állami vizsga (központi tételek) , az anyanyelv mindenki számára kötelező. Az állami vizsgákat az Állami Vizsgaközpont készíti elő és bonyolítja le. Az iskolák a központtól kapják meg a feladatokat, a vizsgadolgozatokat az iskolákban írják meg a tanulók. (április, május) A kész dolgozatokat az iskolák beküldik a Vizsgaközpontba, ahol kijavítják és leosztályozzák a dolgozatokat. A vizsgajegyeket tehát a Vizsgaközpont adja a kiválasztott három tárgyból. Ezen érdemjegyeket az iskolai érdemjegyekkel együtt az egyetemek elismerik. Az észt egyetemeken általában nincs felvételi vizsga.

Néhány probléma

Országunk önállóvá válásakor azt hittük, hogy viszonylag könnyen megoldjuk matematikaoktatásunk problémáit. Ma már látjuk, hogy a megoldás nem ilyen egyszerű. Ma is ugyanazok a fő gondok matematikaoktatásunkban, melyek 1989-ben voltak. Néhány probléma: Bár a matematika-tanterv egyszerűbb, rövidebb lett, sajnos a matematika-tankönyvekben sok elméleti rész és felesleges komplikáció van. A matematikai tankönyvszerzők ma is a felsőbb matematikára, mint rendezőelvre koncentrálnak. A mindennapi élet problémái, a gyakorlati alkalmazások nagyon elhanyagolt területet jelentenek. A matematika tankönyvek „kész", „precízen kidolgozott" matematikát tartalmaznak. Kevés lehetőségük van a tanulóknak a matematika felfedezésére, kifejlesztésére a tankönyvek alapján. Sajnos ez a stílus uralja az iskolai matematikaoktatási gyakorlatot is. A túlzsúfolt matematika tankönyvek és a központi vizsgák stílusa miatt elmondhatjuk, hogy iskolai matematikaoktatásunk erősen eredményorientált, mechanikus készségek kialakítása a fő cél. A fentiekből következik matematikaoktatásunk legfontosabb kérdése: *Hogyan lehet kialakítani egy olyan szituációt matematikaoktatásunkban, hogy ne csak az előírt program lefuttatása, a formális eredmények elérése, a kész matematika felvázolása legyen a cél, hanem a matematika fejlődését, a matematika felfedezését is megtapasztalják, átéljék (ez sikereket és nehézségeket, kudarcokat is jelenthet) a tanulók, továbbá a kerativitás fejlesztése is fontos cél legyen?*

Fordította Ambrus András docens ELTE TTK

Vizvári Béla

Új didaktikai és erkölcsi dilemmák a matematika egyetemi oktatásában

A jelen dolgozat a matematikatanárok és a matematikusok nappali tagozaton történő képzésére koncentrál, de közvetve érinti az összes olyan természettudományi karon oktatott szakot, ahol a matematika oktatása jelentős. Benne a magánvéleményemet fejtem ki, ezért egyes szám első személyt használok.

Aki figyelemmel kísérte az elmúlt évek változásait, az tudja, hogy a középiskolákból a műszaki és természettudományi szakokra érkező gyerekanyag minőségének átlaga romlik. Ennek egyik látványos első megnyilvánulása volt, amikor egyes helyekre gyakorlatilag felvételi nélkül lehetett bejutni. A jelenségnek számos oka van, melyeket egy rövid dolgozat keretében nem lehet feltárni. Azt azonban ki kell emelni, hogy a gazdasági pályák vonzereje nagyon megnőtt, a tehetséges diákok jelentős része arrafelé igyekszik. Eddig a minőség romlása főleg a felvételin nem mérhető olyan tulajdonságokban jelentkezett, mint szorgalom, tudásvágy, kitartás.

De talán olyan drámai változásra senki sem számított, mint ami az idén következett be. Az ELTE TTK-n 14 olyan szak van, ahol a felvételi ponthatár 80 alatt van. Az alábbi táblázat néhány kiragadott szak helyzetét mutatja, ahol a törtvonal előtt, ill. után az államilag finanszírozott, ill. a költségtérítéses hallgatók ponthatára látható. Ha nincs törtvonal, akkor nincs költségtérítéses hallgató.

Bármit is gondoljak a felvételi vizsga helyes vagy helytelen voltáról, annyit mindenképpen el kell ismernem, hogy van korreláció a vizsga eredménye és a szakmai alapképességek között. Tehát jelenleg gyengébb diákok fogják megkezdeni a tanulmányaikat, mint a korábbi évfolyamokon. Sajnos nincs semmi ok feltételezni, hogy ez a tendencia belátható időn belül visszafordulna. Ehhez az kellene, hogy a munkaerőpiacon természettudományos képzettséggel jól lehessen érvényesülni, amihez viszont a gazdasági környezetnek kellene megváltoznia.

Szak	Év	Egyetem		
		JATE	KLTE	ELTE
matematika-tanár	1993	103	102	102
	1994	100	108	107
	1995	100	102	98
	1996	80	93	
	1997	82	98	94
	1998	85/77	72	72
matematikus	1993	109	112	110
	1994	106	108	114
	1995	100	113	108
	1996	107	93	
	1997	106	98	118
	1998	85/77	72	72
programozó matematikus	1993	106	105	105
	1994	108	108	110
	1995	112	102	108
	1996	107	105	110
	1997	104	111	102
	1998	85/77	72	72
alkalmazott matematikus	1996			110
	1997			110/70
	1998			72/72

Ez a helyzet elsődlegesen azt a kérdést veti fel, hogy lehet-e ugyanolyan módszerekkel tanítani, mint amilyeneket eddig alkalmaztunk? Erre a praktikus kérdésre adott válasz azonban implicite tartalmaz a háttérben meghúzódó számos erkölcsi kérdésre adandó választ is. Néhány ezen legfontosabb erkölcsi kérdések közül:

1. Kiért és miért felelős a tanár?
2. Mennyire elkötelezett az intézménye és annak döntései iránt?
3. A felelősséget hogyan kell megjeleníteni a gyakorlatban?

1. A tanár felelős és egyformán felelős valamennyi diákjáért, a 72 pontosért éppúgy, mint a 120 pontosért. E felelősség a gyakorlatban azt jelenti, hogy a tanár minden tanítványa esetében igyekszik az illető számára legkedvezőbb eredményt kihozni. Ennél tekintettel kell lenni arra, hogy a felvételi az einsteini 4-dimenziós tér egyetlen pontjában történt, melyen a diákok különböző irányokban és sebességgel haladtak át. Nem tudható teljes bizonyossággal, hogy ki hova tart. Én a pálya minden lehetséges pontjáról, azaz a középiskolától a fokozatszerzés utánig ismerek matematikust, akinek a karrierje megtört, és ismerek olyat is, aki annak ellenére produkál, hogy ezt nem várta tőle senki. Ezért azt gondolom, hogy előítéletmentesen mindenkinek meg kell adni a lehetőséget, hogy az legyen, ami lenni kíván. Ennek egyik feltétele, hogy a tanár ne is tudja, hogy ki milyen pontszámmal került be.

A tanár felelős az intézménye felé is. Ha az intézmény színvonalas – márpedig a magyar tudományegyetemek azok –, akkor felelős a színvonal és az intézmény jó hírnevének megőrzéséért. De a rá háruló mértékig felelős intézménye gondjainak megoldásáért is.

2. Folytatva az előbbi gondolatot, egy egyetemi oktató gyakran évtizedeket tölt intézményében. Amikor az egyetemre, mint munkahelyre, belép, nem látható előre, hogy az idők mit hoznak, pl. Bokros-csomagot, 72 pontos diákokat. Az egyetem ráadásul egy szervezet is, amelyben gyakran változnak a főnökök, akik mindig a maguk sajátos nézőpontjából kiindulva fognak hozzá a problémák megoldásához, amely problémákat nem ritkán a külső világ kényszeríti az egyetemekre, mint most azt, hogy a normatív finanszírozás miatt egy bizonyos számú diákot mindenképpen fel kell venni, ami korábban nem tapasztalt alacsony ponthatárokhoz vezet.

Felelős-e valaki a főnökei olyan döntéseiért, amivel nem ért egyet? Ha valaki kitart a helyén, és különösen akkor, ha a döntés figyelmen kívül hagyásával egy harmadik, ártatlan személy sorsát befolyásolja negatívan, akkor igen.

3. Mielőtt az utolsó kérdésre megfogalmaznám a választ, néhány dolgot tisztázni szükséges.

Eddig a karainkon az a modell érvényesült, hogy a jó tanár a jó diákkal jó eredményeket ért el. Ha valaki mégse bizonyult olyan jó diáknak, akkor kimaradt: „hadd hulljon a férgese". A kötelező előadások esetében a tanár kezét a tananyag összeállításában mindig is csak a tárgy belső logikája kötötte meg, azonban általában több ilyen logika létezik. Ezért egy több féléves tárgy esetében az egyik előadó bizonyos dolgokat egészen más félévben mondhat el, mint egy más tárgyalásmódot követő oktató. Ehhez járul még a speciál előadások hirdetésének teljes szabadsága, ami nyugati egyetemeken sem mindig létezik. (Ez a szabadság a jövőben is megőrzendő fontos érték.) Vagyis a tanár szinte azt csinál, amihez kedve van. Lássuk be, hogy ez a hozzáállás oktatási szempontból egy amatőr hozzáállás, még ha szakmailag bármily magas szintű munkát tesz is lehetővé.

Érdemes szemügyre venni a színvonal kérdését is. Ha egy csúnya hasonlattal élve a fel-

sőoktatási intézményeket szakembergyáraknak gondoljuk, akkor az intézmény színvonalát a „végtermék", vagyis a kikerülő szakemberek színvonala határozza meg. Ebben a felfogásban az egyes előadások – alább részletezendő értelemben vett – szakmai színvonala lokális kérdés, az egyes előadásoknak a képzés egészét kell szolgálni.

Nemcsak egyetemeken, hanem alacsonyabb fokú oktatási intézményekben is ismeretes a „tartani a színvonalat" kifejezés, ami nagyon sokszor a gyakorlatban azt jelenti, hogy a tanár az órákon megmozgat egy jelentős szakmai apparátust, függetlenül attól, .hogy arra alapot ad-e a diákok tudása. Ha a kettő között rés van, akkor az előadás nemcsak, hogy nem növeli a tanulók tudását, hanem adott esetben össze is zavarhatja azt. Tehát különbség van a szakmai és az oktatási értelemben vett (jó) színvonal között.

Az előttünk álló feladat, hogy alacsonyabbról indulva ugyanolyan szakmai magasságba juttassuk el a diákokat a képzés egésze alatt.

És eljuttassuk! Mert mind a diákok, mind az intézményeink iránti erkölcsi felelősségünk ezt kívánja. Szakítani kell azzal az államszocializmus idejéből visszamaradt gondolkozással, hogy az állam el tudja dönteni, hogy szakmánként hány emberre van szükség, a mi feladatunk csak annyi, hogy „szállítsuk" őket. Az állam akkor sem tudta, hogy a munkaerőpiacon mit lehet eladni, ma még kevésbé, mi meg kevesebbet képeztünk ki, mint a felvételi keretszámokban jelentkező állami igény. Ma az állam feladata a pályaválasztók pontos és gyors tájékoztatása a munkaerőpiac helyzetéről, hogy a továbbtanulni szándékozók megalapozott döntést hozhassanak. Az egyetemek feladata pedig konvertálható tudást adni, mert valószínűsíthető, hogy diákjaik az életben többször is pályamódosításra kényszerülnek. Ma megnőtt az egyén felelőssége önmaga iránt, ha egy szak nem megfelelő valakinek, akkor elsősorban neki kell észrevennie, hogy váltani kell.

A jelenlegi helyzetben, amikor normatív finanszírozás van, és ez aligha fog változni, az intézmények is abban érdekeltek, hogy megtartsák a diákjaikat.

Mindez felveti például azt, hogy a jövőben mennyire lesz elfogadható a legkülönbözőbb egyetemeken, szakokon és tárgyakban gyakori 50 százalékos vagy magasabb bukási arány. Képzeljük el, hogy egy nem matematika szakos, de matematikát tanuló évfolyamot megfelez egy matematikus előadó, és ezzel eltűnik egy másik szak adott évfolyamra eső költségvetési támogatásának fele. Megengedhető ez a kollégáinkkal szemben? De a magas bukási arány ugyanilyen aggályos a diák szempontjából is. Ugyanis vagy olyasmit akartak megtanítani neki, amire képességei és előképzettsége alapján nem képes, vagy nem megfelelő módszerrel tanították. Mindkettő súlyos hiba didaktikai szempontból, és ismét amatőr hozzáállásra vall.

A jövő a mind szakmailag, mind didaktikailag profi oktatóké kellene, hogy legyen. Egy mondás szerint a profit az különbözteti meg az amatőrtől, hogy akkor is meg tudja csinálni, ha nincs kedve hozzá... Az egyes évfolyamokat akkor is meg kell tudni tanítani a szakmához szükséges ismeretekre, ha képességük és hozzáállásuk hagy kívánnivalót maga után.

Visszatérve a vizsgáztatásra, talán ez az egyik legegyszerűbben megoldható kérdés. A mai magyar vizsgáztatási szokásnak az a lényege, hogy a tanár bebizonyítsa, hogy a diák mit nem tud. Ha a tanár semmi hiányt nem talált, akkor a jegy jeles, különben rosszabb annál. Ezzel szemben át kellene térni egy olyan vizsgáztatási gyakorlatra, ahol a diáknak van módja bebizonyítani, hogy mit tud. Ez úgy valósítható meg, hogy több feladatot kell adni neki, mint aminek a megoldása egy adott időkorláton belül elvárható, vagyis maga választ-

hatja ki a számára legkedvezőbb feladatokat. Jegye attól függ, hogy az időhatáron belül az elvárhatóhoz képest mennyit sikerült megoldania.

A legfontosabb mégis az, hogy a diákok olyan oktatást kapjanak, amiben tudnak produkálni. A matematika elsajátításához egy bizonyos szinten felül igen erős absztrakciós képesség kell. Joggal feltételezhető, hogy a 72 pontos diákok nem rendelkeznek kellő mértékig ezzel a képességgel. A helyzetet tovább rontja, hogy ma egy tárgy oktatása sokszor kettéválik egy absztrakt elméletre, amit a tárgy előadója mond el először, és egy ezt követő gyakorlatra, ahol az absztrakt elméletnek különböző matematikai helyzetekben való alkalmazását tanítják. Ha az elmélet érthetetlen volt, akkor a gyakorlat sem ér sokat. E merev kettéosztás oldásával sokat lehet tenni az érthetőség növelésére. Így bevezető, illusztratív példákat lehet alkalmazni az elméleti órán, hogy legyen mihez kötni az absztrakt fogalmakat, míg egyes kisebb jelentőségű elméleti kérdéseket a gyakorlaton is meg lehet tárgyalni. Sokat segíthet egy kitekintés is, hogy egyes tételeknek mi a szerepe más tudományokban. Persze, hogy ilyen és hasonló elveket hogyan lehet felhasználni, sőt esetleg milyen eszközöket lehet alkalmazni, annak részletes kidolgozása nagyrészt a jövő feladata. (Arra vannak kísérletek, hogy a számítógépet, mint szemléltető eszközt, hogyan lehet felhasználni a matematika oktatásában, de ezek az eredmények nem kellőképpen elterjedtek.)

Szólni kell még az emberi tényezőről. Ma lehetséges, hogy valaki úgy végezze el az egyetemet, hogy a vizsgáktól és egyéb az „üzemvitelből" adódó alkalmaktól eltekintve, egyszer is beszélgetett volna egy tanárával. A tanárok nem felelősek egyetlen diákért sem személy szerint. Ezért a diák, az ember, nem is érezheti, hogy fontos. Azt gondolom, hogy egy olyan rendszer bevezetése, amelyben minden diáknak van egy tanácsadó tanára, akihez fordulhat a problémáival, de aki számon is kérheti tőle, hogy hogyan halad a tanulmányaival, sokat segítene az oktatás személyes jellegének megteremtésében, annak demonstrálásában, hogy, a diákok személy szerint is fontosak, és ezáltal a diákoknak a tanulás iránti személyes elkötelezettségük növelésében. Egy további nem jelentéktelen előnye lenne ennek a rendszernek, hogy igen megnövelné a visszacsatolás mértékét, és viszonylag hamar kiderülne, hogy melyek azok az anyagrészek, amelyek didaktikai szempontból nincsenek jól. megoldva.

Diákjaink írásbeli és szóbeli kifejezőkészsége alatta marad például a közgazdasági vagy jogi szakon végzettekének. Sok természettudományos szakon végzett .hallgatónak a szakdolgozata az első és egyetlen teljes írásműve, amit az egyetemen el kell készítenie. Bár az írásbeli dolgozatok javítása tovább terheli az oktatókat, mégis lépni kellene ebbe az irányba. A törvény is lehetőséget ad erre, amikor órán kívüli munkát is megenged kredittel honorálni. Jobb kifejezőkészséggel a hallgatók is versenyképesebbek lennének a munkaerőpiacon, arról nem is beszélve, hogy egy értelmiséginek illik írástudónak lennie.

Összefoglalva, a diákok és az intézményünk iránti felelősségünk a következőképpen jeleníthető meg a gyakorlatban:

1. didaktikailag jól kidolgozott, az új helyzethez igazított és a végzett hallgatók magas színvonalát biztosító oktatási módszerekkel,
2. a felvételi pontszámoktól független, objektív, a diák tudásának pozitív oldalára koncentráló vizsgáztatási módszerekkel,
3. az oktatás személyes jellegét megteremtő új tanár-diák viszony bevezetésével.

Bunyik Zoltán

Beszámoló az I. Vajdasági Magyar Matematikaversenyről

Az 1997/98-as tanévben először került megrendezésre Vajdaságban magyar nyelvű matematikaverseny a tartomány egész területén élő magyar ajkú felsős általános iskolások részére. A verseny szervezői a szabadkai **Új kép** pedagógiai folyóirat, a **Vajdasági Magyar Pedagógusok Egyesületének Matematikai Szakosztálya** és az újvidéki **Matematikai Iskola**. A verseny jelentős támogatója volt a szabadkai Önkormányzat és a Jó Pajtás gyermeklap. Rajtuk kívül más intézmények és vállalkozók is nyújtottak anyagi segítséget a verseny szervezéséhez, melyet mindannyiuknak köszönünk.

Célunk a fiatal vajdasági magyar ajkú matematika-tehetségek felkarolása volt. A jugoszláv versenyekre a magyar ajkú diákok terminológiai nehézségek miatt nehezen kapcsolódnak be, ezért sokan a tehetséggondozáson kívül rekedtek. További célunk azon tanulók figyelmének felkeltése volt, akik eddig nem foglalkoztak matematikai versenyfeladatokkal. Reméltük, hogy a feladatok megoldásmeneteinek utólagos megjelentetése hasznos lesz a szaktanároknak.

A verseny előtt megfelelő nehézségű, részletesen kidolgozott mintapéldákat juttattunk el a versenyzőkhöz és felkészítő tanáraikhoz. Maga a verseny két részből állt. Az **első rész levelező pontverseny jellegű volt**, és három fordulón át zajlott márciustól májusig. Minden hónap elején megjelentettünk korosztályonként 5 - 5 feladatot, melyek megoldásait a hónap végéig kellett beküldeni. Ezután minden feladat részletes megoldása is megjelent. A kitűzött versenyfeladatok a hivatalos jugoszláv versenyeken szereplő feladatok szintjén voltak. Kerültük azonban a túl száraz megfogalmazású és nagyobb technikai felkészültséget igénylő feladatokat. Vajdaság egész területéről közel 20 iskolából jelentkeztek a versenyzők, összesen 61-en.

A **verseny második része zárthelyi verseny volt** 1998. június 13-án Szabadkán, melybe minden korosztály pontversenyének legjobb öt tanulója került be. A verseny támogatói minden résztvevőnek kedves kis ajándékot adományoztak. Örömmel vettük tudomásul, hogy a pontverseny legjobbjai a zárthelyi versenyen is megállták helyüket. A zárthelyi verseny legjobbjait és felkészítő tanárait értékes könyvjutalommal díjazta a Szervezőbizottság; az első helyezettek pedig 1998. július 1-jén egynapos ópusztaszeri kiránduláson vehettek részt. A díjazott versenyzők a következők voltak:

V. osztály:

1. *Vékony Áron*, Szabadka, VIII. Vajdasági Rohambrigád Általános Iskola
2. *Csernek Zsolt*, Újvidék, Sonja Marinkovic Általános Iskola
3. Szabó Gabriella, Pacsér, Mosa Pijade Általános Iskola
   Karsai Diana, Pacsér, Mosa Pijade Általános Iskola
   Erdudac Dániel, Szabadka, VIII. Vajdasági Rohambrigád Általános Iskola

VI. osztály:

1. *Bencsik Orsolya*, Topolya, Csáki Lajos Általános Iskola
2. *Szép Anikó*, Pacsér, Mosa Pijade Általános Iskola
3. *László Norbert*, Szentmihály, Sonja Marinkovic Általános Iskola

VII. osztály:

nem voltak díjazottak

VIII. osztály:

1. *Sára Péter*, Debellács, Mosa Pijade Általános Iskola
2. *Huszta Natália*, Szentmihály, Sonja Marinkovic Általános Iskola

A zárthelyi versenyen a következő feladatokat tűztük ki 90 perces megoldási idővel:

V. osztály

1. Egy születésnapi ünnepélyen 15-en voltak. Mindenki mindenkivel egyszer kezet fogott. Hány kézfogás volt összesen?
2. Hány olyan téglalap van, melynek a területe 2000 cm^2, ha a téglalap oldalainak mérőszáma egész szám?
3. Határozzuk meg a legnagyobb természetes számot, amelyben a számjegyek mind különbözőek, és amely osztható 11-gyel!
4. Egy könyv oldalainak a számozását a 3. oldalon kezdték. Hány számjegyet kellett leírni a számozáshoz, ha a könyv 400 oldalas?
5. Határozzuk meg mindazokat a törteket, amelyeknek a nevezője egyszámjegyű szám, és amelyek nagyobbak $\frac{7}{9}$-nél és kisebbek $\frac{8}{9}$-nél!

VI. osztály

1. Két ceruza és egy füzet 12 dinárba kerül. Egy ceruza és két füzet pedig 15 dinárba. Mennyit fizetnénk, ha egy ceruzát és egy füzetet vennénk?
2. Igazold, hogy 7 darab különböző természetes szám négyzete között van két olyan, amelyek különbsége 10-zel osztható!
3. Létezik-e olyan természetes szám, amelyben a számjegyek szorzata 54573750 ?
4. Írjunk fel 3 db háromjegyű számot, miközben minden nullától különböző számjegyet csak egyszer használhatunk fel, és a legnagyobb és a legkisebb szám különbsége a lehető legkisebb legyen!
5. Pisti összeadott 7 egymást követő természetes számot. A kapott összegről azt állítja, hogy prímszám. Bizonyítsuk be, hogy tévedett.

VII. osztály

1. Áron ma 4 évvel idősebb Emmától. Tíz évvel ezelőtt Áron kétszer annyi idős volt mint Emma. Hány évesek ma?
2. Egy iskolának nincs 1000-nél több tanulója, és ha ötösével, hatosával, hetesével vagy nyolcasával állnak sorba, akkor az utolsó sorba mindig egy tanuló jut. Hány tanulója van az iskolának?
3. Ha három egymás után következő egész szám szorzatát megnöveljük a középső számmal, akkor e középső szám köbét kapjuk eredményül. Bizonyítsuk be!
4. Egy négyzetet szétvágtunk olyan egybevágó derékszögű háromszögekre, melyeknek a befogói 3 cm és 4 cm. Bizonyítsuk be, hogy a kapott háromszögek száma páros!
5. Egy konvex négyszögben meghúztuk az átlókat, és így négy háromszöget kaptunk. E háromszögeknél a területek mérőszámai olyan különböző egész számok, melyek nagyobbak 2-nél, de kisebbek 10-nél. Határozzuk meg a négyszög területét!

VIII. osztály

1. Összeadtunk 100 db különböző természetes számot és 9998-at kaptunk eredményül. Bizonyítsuk be, hogy a számok között volt legalább két páros szám!
2. A tizenkét játékosból álló kosárlabdacsapatból hányféleképpen jelölheti ki az edző a kezdő ötöst?
3. Egy ember dinnyéket árul a piacon. Tíz óráig eladta a dinnyék felét, és még egy dinnyét. Háromtól délig a maradék felét és még egy dinnyét. Így a megmaradt hat dinnyével indult haza. Hány dinnyéje volt?
4. Ha összeadjuk két egész szám összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát, eredményül 500-at kapunk. Mi lehet ez a két egész szám?
5. Adjuk meg az összes olyan téglalapot, amelynél az oldalak mérőszáma egész szám, a terület mérőszáma pedig pontosan háromszorosa a kerület mérőszámának!

Honti Dénes

Egy újabb franciaországi érettségi feladatsorozat

Korábbiakban közöltem egy – a francia gimnázium (líceum) gazdasági ágazatán kitűzött – érettségi feladatsorozatot. Az alábbi sorozat 1997-ben a természettudományos ágazaton szerepelt, felépítése a szokásos. A jelöltnek két gyakorlatot és egy problémát kell kidolgozni négy óra alatt. A második gyakorlat választható aszerint, hogy a jelölt a speciális (fakultatív) órákat felvette-e vagy sem.

Az érettségi hazai változásai közben talán nem érdektelen a bemutatott sorozatok tanulmányozása. Mindössze három feladattal kell foglalkozni, de mindegyikben számos, részben összefüggő kérdés van. A feladatok súlyosabb anyagrészekre vonatkoznak, az S ágazat érettségijén a valószínűség-számítás, a komplex számok és az analízis is rendszeresen szerepel. Az elemibb eljárások (egyenlet, egyenlőtlenség megoldása, algebrai átalakítás, függvényábrázolás stb.) csak részlépésként jelennek meg.

A teljes megoldás biztos tudást, nagy gyakorlaton alapuló tempós, hibátlan munkavégzést és jó áttekintőképességet kíván. Ugyanakkor egyetlen kérdés sem igényel versenyszerű ötletet. A négy óra alatti teljes kidolgozást mindenkinek javaslom kipróbálni.

Talán sikerül érzékeltetnem a szituáció, a feltételek leírásának, a kérdések megfogalmazásának körültekintő gondosságát. A fogalmazás, az érvelés világossága és pontossága a dolgozat értékelésének is fontos szempontja.

S sorozat
Közös minden jelölt számára

Egy urna két fehér és négy fekete golyót tartalmaz. A golyók érintésre megkülönböztethetetlenek.

1. Négyszer egymásután kihúzunk egy-egy golyót visszatevés nélkül
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy sorrendben egy fekete, egy fekete, egy fekete és egy fehér golyót húzunk?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy fehér golyót húzunk a négy húzás során?
2. Most egymásután kihúzunk négy golyót visszatevéssel az eredeti készletből. Feleljünk ebben az esetben is az 1. pontban feltett kérdésekre!
3. Legyen n pozitív egész szám. Végrehajtunk egymásután n húzást visszatevéssel. Jelöljük P_n-nel annak valószínűségét, hogy ezen n húzás során pontosan egy darab fehér golyót húzunk az utolsó húzásra.
   a) Számítsuk ki P_1, P_2, P_3 és P_n értékét!
   b) Legyen $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n$. $(n > 1)$
   Fejezzük ki S_n-t az n függvényében, és határozzuk meg az (S_n) sorozat határértékét!

2. Gyakorlat (5 pont)
A speciális anyagot nem tanuló jelöltek számára

A P komplex síkot ellátjuk az $(O;\vec{u};\vec{v})$ derékszögű koordinátarendszerrel. (A rajzon az egység legyen 3 cm.)

A-val jelöljük az i-hez tartozó pontot. A sík minden A-tól különböző, a z komplex számhoz tartozó M pontjának megfeleltetjük a z' komplex számhoz tartozó M' pontot. A z' definíciója:

$$z' = \frac{z^2}{i - z}.$$

1. Határozza meg azokat az M pontokat, melyek egybeesnek M' képükkel!
2. Legyen adva egy, az i-től különböző z komplex szám. Tegyük fel, hogy $z = x + iy$

és $z' = x' + iy'$, ahol x, y, x', y' valós számok.
Mutassa meg, hogy:

$$x' = \frac{-x(x^2 + y^2 - 2y)}{x^2 + (1-y)^2}.$$

Ennek alapján határozza meg azon M pontok E halmazát, melyeknek M' képpontja a képzetes tengelyre esik. Ábrázolja az E halmazt!

3. Találjon egy egyszerű összefüggést az $\overline{OM}$, $\overline{AM}$ és $\overline{OM'}$ távolságok között! Ebből határozza meg a sík azon M pontjainak F halmazát, melyekre M és M' ugyanazon az O középpontú körvonalon helyezkedik el. Ábrázolja az F halmazt!

4. Ebben a pontban olyan, a z komplex számhoz tartozó M pontot tekintünk, mely az A középpontú, 1/2 sugarú körön helyezkedik el. M' a megfelelő z' komplex számhoz tartozó pont, és G az A, M, M' pontok által meghatározott háromszög súlypontja.
Adja meg a G ponthoz tartozó z_0 komplex számot a z függvényében!
Mutassa meg, hogy G egy O középpontú körön helyezkedik el, és adja meg a kör sugarát! Összehasonlítva az $(\vec{u}, \overrightarrow{OG})$ és az $(\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ szögeket, szerkessze meg G pontot. Ennek alapján szerkessze meg M' pontot!

2. Gyakorlat (5 pont)
A speciális anyagot is tanuló jelöltek számára

A P komplex síkot ellátjuk az $(O; \vec{u}; \vec{v})$ derékszögű koordinátarendszerrel. Készítsen ábrát, melyet a kérdések során kell kiegészíteni. Hosszúságegységként 1 cm-t vegyen!

Tekintsük a $(2\sqrt{3}; 6)$ koordinátájú J pontot és az $\overline{OJ}$ átmérőjű C kört. A kör középpontját I-vel jelöljük. Az $A(2\sqrt{3}; 0)$ és a $B(0; 6)$ pont a J pont merőleges vetülete rendre az $(O; \vec{u})$, illetve az $(O; \vec{v})$ tengelyre. Megjegyezzük, hogy a C kör az $OAJB$ téglalap köré írt köre.

1. Legyen S a B pontot A-ba átvivő O középpontú forgatva nyújtás.
a) Határozza meg az S transzformáció szögét és arányát!
b) Határozza meg az I, a J és az A pontoknak az S forgatva nyújtás által adott I', J' és A' képpontjait!
c) Legyen M a C kör tetszőleges pontja, M' pedig az M pont S transzformáció által adott képe. Mi az M' pontok által meghatározott C' ponthalmaz, miközben az M pont befutja a C kört?
Ábrázolja a C' halmazt, és igazolja, hogy bárhogyan is választjuk meg a C kör M pontját, az M, az A és az M' pontok egy egyenesbe esnek.

2. Az Ω pont koordinátái legyenek $(4 + 2\sqrt{3}; 2)$. Tekintsük az Ω középpontú, $-\pi/2$ szögű R pontkörüli forgatást.
a) Mutassa meg, hogy a J' pont R transzformáció általi képe J.
b) A P sík minden M pontjának S transzformáció által adott képét jelölje M', az M'-nek az R transzformáció általi képét pedig M''. Határozza meg a J pont $R \circ S$ transzformáció által adott képét ($R \circ S$ az R és az S kompozíciója).
Határozza meg a $\overrightarrow{JM}$ és a $\overrightarrow{JM''}$ vektorok szögét, ahol M különbözik J-től.
c) Mutassa meg, hogy $\overline{JM''} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{JM}$.
Mindebből vezesse le a $\overrightarrow{JM}$ és a $\overrightarrow{JM''}$ vektorok kapcsolatát és következtessen az $R \circ S$ transzformáció természetére!

Probléma (11 pont)

Az egész probléma során adva van egy $(O; \vec{i}; \vec{j})$ derékszögű koordinátarendszer. A grafikus egység hossza 2 cm.

A rész
Egy g függvény vizsgálata

Legyen g függvény a $]0; \infty[$ intervallumon értelmezve az alábbi szerint.

$$g(x) = x\ln x - x + 1,$$

és C legyen a g grafikonja az $(O;\vec{i};\vec{j})$ koordinátarendszerben.

1. Állapítsa meg g határértékét a 0 helyen és a plusz végtelenben!

2. Tanulmányozza g növekedési viszonyait! Ennek alapján vezesse le $g(x)$ előjelét az x függvényében!

3. Az $x \mapsto \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$ függvény $(O;\vec{i};\vec{j})$ koordinátarendszer-beli grafikonját C'-vel jelöljük. Mutassa meg, hogy a C és C' görbéknek két közös pontja van, melyeknek abszcisszája 1 illetve e, és hogy az $[1; e]$ intervallum minden x elemére:

$$x\ln x - x + 1 \le \ln x .$$

Nem kérjük C és C' ábrázolását.

4. *a)* Határozza meg parciális integrálás segítségével a következő integrált:

$$I = \int_1^e (x-1)\ln x \, dx .$$

b) Legyen D az alábbi módon meghatározott síktartomány:

$$D = \{M(x; y) \mid 1 \le x \le e \text{ és } g(x) \le y \le \ln x\}.$$

Határozza meg cm^2-ben a D tartomány területét! Adja meg a területnek egy 10^{-2} pontosságú tizedes közelítő értékét!

B rész

Egy f függvény vizsgálata

Legyen az f függvény az $]1; \infty[$ intervallumon értelmezve az alábbi szerint:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}\ln x .$$

1. Állapítsa meg f határértékét a plusz végtelenben és az 1 helyen! (Az 1 helyhez tartozó határérték tanulmányozásához alkalmazható egy felső közelítés.)

2. Határozza meg f változási táblázatát! (Megjegyezzük, hogy $f'(x)$ könnyen felírható $g(x)$ segítségével).

3. Rajzolja meg f grafikonját az $(O;\vec{i};\vec{j})$ koordinátarendszerben!

C rész

Az $f(x) = 1/2$ egyenlet tanulmányozása

1. Mutassa meg, hogy az $f(x) = 1/2$ egyenletnek pontosan egy gyöke van. A gyököt α-val jelölve igazoljuk, hogy: $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$.

2. Legyen h az $]1; \infty[$ intervallumon az alábbi módon értelmezve:

$$h(x) = \ln x + 1/2x + 1/2.$$

a) Mutassa meg, hogy α a $h(x) = x$ egyenletnek is gyöke!
b) Vizsgálja meg h növekedési viszonyait!
c) Tekintsük az $I = [3; 4]$ intervallumot! Mutassa meg, hogy I minden x elemére $h(x) \in I$ és $|h'(x)| \le 5/6$!

3. Értelmezzük az (u_n) sorozatot a következő rekurzióval:

$u_0 = 3$ és minden $n \ge 0$-ra $u_{n+1} = h(u_n)$.

Igazolja sorjában az alábbi három tulajdonságot:

a) Minden természetes egész n-re:

$$|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{5}{6}|u_n - \alpha| .$$

b) Minden pozitív egész n-re:

$$|u_n - \alpha| \le \left(\frac{5}{6}\right)^n .$$

c) Az (u_n) sorozat α-hoz konvergál.

4. Adjon meg egy p természetes számot, melyről az előző egyenlőtlenségek alapján igazolni tudja, hogy u_p egy 10^{-3} pontosságú közelítő értéke α-nak! Adja meg tizedes törtben α egy 10^{-3} pontosságú közelítő értékét!

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat kitűzőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 1999. március 31.**

115. Van-e megoldása a páratlan pozitív egészek körében az

$$(x+y)^2+(x+z)^2=(y+z)^2$$

egyenletnek?

116. Mutassuk meg, hogy ha a, b és c 1-nél nagyobb pozitív valós számok, r pedig pozitív valós szám, akkor

$$(\log_a bc)^r+(\log_b ca)^r+(\log_c ab)^r \geq 3\cdot 2^r\,!$$

117. Igazoljuk, hogy bármely háromszög felbontható n darab egyenlő szárú háromszögre, ahol n 4-nél nem kisebb természetes szám!

118. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k^2}}$ irracionális!

Bencze Mihály, Brassó

119. Határozzuk meg azon n-jegyű természetes számok számát, amelyek csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazhatják, és amelyekben bármely két szomszédos számjegy különbsége 1!

Feladatmegoldások (100-104. feladatok)

100. Az ABC háromszög szögeinek mértéke 35°, 65°, 80°. Tekintsük e háromszög talpponti háromszögét, majd ennek talpponti háromszögét és így tovább! Mekkorák az 1997. talpponti háromszög szögei?

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

Megoldás: Ismert, hogy ha a háromszög hegyesszögű, azaz $\alpha<90°$, $\beta<90°$, $\gamma<90°$, akkor talpponti háromszögének szögei $180°-2\alpha$, $180°-2\beta$, $180°-2\gamma$, ha pedig tompaszögű ($90°<\alpha$), akkor a talpponti háromszög szögei $2\alpha-180°$, 2β, 2γ.

Jelölje α_k, β_k, γ_k a k-adik talpponti háromszög szögeit. A fentiek alapján az adott háromszögből kiindulva

$\alpha_1=110°$, $\beta_1=50°$, $\gamma_1=20°$;
$\alpha_2=40°$, $\beta_2=100°$, $\gamma_2=40°$;
$\alpha_3=80°$, $\beta_3=20°$, $\gamma_3=80°$;
$\alpha_4=20°$, $\beta_4=140°$, $\gamma_4=20°$;
$\alpha_5=40°$, $\beta_5=100°$, $\gamma_5=40°$.

Látható, hogy a talpponti háromszögek belső szögeinek sorozatai periodikus sorozatok, amelyekre nézve teljes indukcióval bizonyítható, hogy bármely $k>0$ egész esetén $\alpha_{3k-1}=40°$, $\beta_{3k-1}=100°$, $\gamma_{3k-1}=40°$, $\alpha_{3k}=80°$, $\beta_{3k}=20°$, $\gamma_{3k}=80°$, $\alpha_{3k+1}=20°$, $\beta_{3k+1}=140°$, $\gamma_{3k+1}=20°$. Mivel $1997=3\cdot 666-1$, ezért az 1997. talpponti háromszög szögei: 40°, 100°, 40°.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 9.

101. Hány olyan 77-tel osztható hatjegyű természetes szám van, amelyben az 1997 (ebben a sorrendben és más közbeeső számjegyek nélkül) előfordul?

Darvasi Gyula, Nyíregyháza

Megoldás: Keresett számaink $\overline{1997ab}$, $\overline{c1997d}$, vagy $\overline{ef1997}$ alakúak lehetnek.

Legyen $N = \overline{1997ab} = 199700 + 10a + b = 2593 \cdot 77 + 39 + 10 + b$, ahol $a, b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$. N 77-tel pontosan akkor osztható, ha $10a + b + 39$ osztható 77-tel. Az a és b számjegyekre vonatkozó feltétel miatt $39 \le 10a + b + 39 \le 138$, amiből az előzőek alapján $10a + b + 39 = 77$, azaz $10a + b = 38$. Tehát az első típusú számok közül csak egy osztható 77-tel, az $N_1 = 199738$.

A továbbiakban felhasználjuk a következő tulajdonságot: Az $N = \overline{abcdef}$ tízes számrendszerbeli szám akkor és csak akkor osztható 77-tel, ha az $N' = \overline{fabcde}$ szám is osztható 77-tel. Ennek igazolása két észrevételen múlik: 1. Mivel $(10; 77) = 1$, ezért N' pontosan akkor osztható 77-tel, amikor $10N'$. 2. $10N' - N = f \cdot (10^6 - 1) = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot f$, azaz $10N'$ pontosan akkor osztható 77-tel, amikor N.

A fenti tulajdonság értelmében, ha egy hatjegyű szám osztható 77-tel, akkor az utolsó jegyet előre írva, vagy az elsőt hátra írva szintén 77-tel osztható számot kapunk. Ebből adódóan az egyetlen második típusú 77-tel osztható szám az $N_2 = 819973$, és az egyetlen harmadik típusú szám az $N_3 = 381997$.

Megjegyzés: A fenti módszert 77-tel való osztathatóság helyett $10^6 - 1$ bármelyik osztójára alkalmazhatjuk.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 10.

102. Határozzuk meg az összes olyan x, z pozitív egész számokat és $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ természetes számokból álló számsorozatokat, amelyekre

$$1^x + 2^x + ... + n^x = y_n^z$$

bármely pozitív egész n esetén teljesül!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Ha $z = 1$, akkor tetszőleges pozitív egész x és n esetén $y_n = \sum_{k=1}^{n} k^x$.

Ha $z > 1$, akkor $n = 2$ esetén egyenletünk:

$$1 + 2^x = y_2^z. \qquad (1)$$

(1)-ből a feltételek figyelmbe vételével adódik, hogy y_2 páratlan. Az (1) egyenlet átalakításával kapjuk, hogy

$$2^x = (y_2 - 1)\left(y_2^{z-1} + y_2^{z-2} + ... + 1\right). \qquad (2)$$

Mivel y_2 páratlan és $z > 1$, a (2) egyenlet csak úgy állhat fenn, ha léteznek olyan u és v pozitív egészek, melyekre

$$\left.\begin{aligned} y_2 - 1 &= 2^u \\ y_2^{z-1} + y_2^{z-2} + ... + 1 &= 2^v \\ u + v &= x \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Mivel y_2 páratlan és $v > 0$, ezért z páros. Legyen $z = 2z'$, ahol z' pozitív egész. Ezzel (1) a következő ekvivalens alakba írható:

$$2^x = \left(y_2^{z'} - 1\right)\left(y_2^{z'} + 1\right). \qquad (4)$$

A feltételek miatt (4) jobb oldalának mindkét tényezője 2-nek pozitív egész kitevőjű hatványa, és mivel különbségük 2, ezért

$$\left.\begin{aligned} y_2^{z'} - 1 &= 2 \\ y_2^{z'} + 1 &= 4 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow y_2^{z'} = 3. \qquad (5)$$

(5)-ből $y_2 = 3$ és $z' = 1$. Ezt (4)-be helyettesítve kapjuk, hogy $x = 3$. Tehát (1) akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 3$, $y_2 = 3$, $z = 2$.

Az $x = 3$, $z = 2$ esetén tetszőleges pozitív egész n-re egyenletünk

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = y_n^2,$$

ahonnan a $z > 1$ esetre a megoldás: $x = 3$, $z = 2$, $y_n = \frac{n(n+1)}{2}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 3.

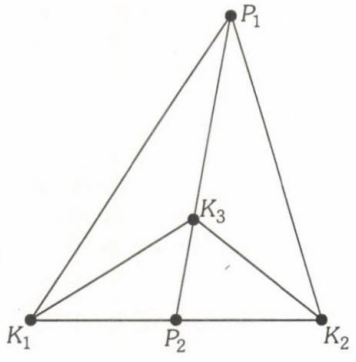
103. P és K a sík két nemüres, diszjunkt, véges ponthalmaza. P pontjait pirosra, K pontjait kékre festjük. Tudjuk, hogy bármely két azonos színű pontot összekötő szakasz tartalmaz olyan pontot, amelynek színe különbözik a végpontok színétől. Mit mondhatunk P és K pontjainak elhelyezkedéséről?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy P és K pontjai ugyanazon egyenesre illeszkednek.

Jelölje a P halmaz pontjait P_i $(i = 1, ..., n)$, a K halmaz pontjait K_i $(i = 1, ..., m)$. Tegyük fel, hogy nincs az összes pont egy egyenesen.

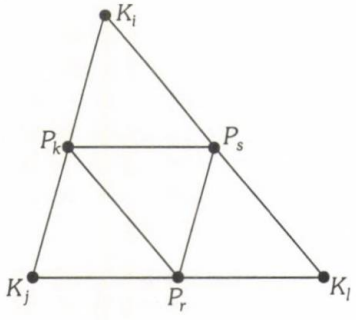
Nevezzük egyszínű háromszögeknek azokat a háromszögeket, amelyek csúcsai ugyanolyan színűek. Belátjuk, hogy ha indirekt feltételünk teljesül, akkor van egyszínű háromszög.

Az általánosság megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy P_1, K_1, K_2 pontok nincsenek egy egyenesen. A feladat feltétele alapján ekkor a K_1K_2 szakasz tartalmaz egy P_2 belső pontot, és a P_1P_2 szakasz tartalmaz egy K_3 belső pontot (*1. ábra*). A $K_1K_2K_3$ háromszög egyszínű.



1. ábra

Az egyszínű háromszögek közül legyen $K_iK_jK_l$ a legkisebb kerületű. (Minimális kerületű háromszög van, mivel P és K véges halmazok, és nem sértjük az általánosságot, ha feltételezzük, hogy kék ez a háromszög.) Ennek a háromszögnek mindhárom oldalán van egy-egy piros pont (*2. ábra*). Ez a három piros pont egy olyan egyszínű háromszöget határoz meg, amelynek kerülete kisebb a $K_iK_jK_l$ háromszög kerületénél, ami ellentmondás, tehát a pontok mind egy egyenesre illeszkednek.



2. ábra

Szász Róbert, Marosvásárhely

Megjegyzés: Az, hogy a pontok egy egyenesre illeszkednek, közvetlenül adódik Gallai Tibor következő tételéből: Ha adott a síkban n pont ($n \geq 3$), melyek nincsenek mind egy egyenesen, akkor van olyan egyenes, mely pontosan kettőn megy át az adott pontok közül.

Schutzbach Mártonné, Siófok

A megoldók száma: 4.

104. Az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat teljesíti az $x_{n+2} = 2x_{n+1} + n(n+1)x_n$ rekurziót és a $0 < 3x_1 \leq 2x_2 \leq 4x_1$ kezdeti feltételt. Határozzuk meg a következő két határértéket!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x_n}}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{x_{n+1}} - \sqrt[n]{x_n}\right)$

András Szilárd, Csíkszereda

Megoldás: Könnyen igazolható teljes indukcióval, hogy sorozatunknak csak pozitív tagjai vannak, ezért a rekurziós összefüggés mindkét oldalát $(n+1)x_{n+1}$-gyel osztva ekvivalens egyenlőséghez jutunk:

$$\frac{x_{n+2}}{(n+1)x_{n+1}} = \frac{2}{n+1} + \frac{nx_n}{x_{n+1}}. \qquad (1)$$

Ha minden n-re bevezetjük az $y_n = \dfrac{x_{n+1}}{nx_n}$ jelölést, akkor (1) alapján az $\{y_n\}$ sorozat a következő rekurziónak és kezdeti feltételnek tesz eleget:

$$y_{n+1} = \frac{2}{n+1} + y_n \ (n \in \mathbb{Z}^+); \ \frac{3}{2} < y_1 < 2. \qquad (2)$$

Most tanulmányozzuk az $\{y_n\}$ sorozatot. (2)-ből következik, hogy $\frac{1}{2} < \frac{1}{y_1} < \frac{2}{3}$, ahonnan $\frac{3}{2} < y_2 < \frac{5}{3}$, $\frac{19}{10} < y_3 < \frac{4}{3}$, és az is, hogy ha van határértéke a sorozatnak, akkor az éppen 1. Ezekből sejthető, hogy a sorozat tagjai 1 és egy jobbról 1-hez tartó sorozat tagjai közé zárhatók. A következőkben teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$1 < y_n < 1 + \frac{2}{n} \qquad (3)$$

bármely pozitív egész n-re. $n = 1$ esetén igaz (3), ahogy azt fentebb már láttuk. Tegyük fel,

hogy valamely pozitív egész k-ra $1 < y_k < \frac{k+2}{k}$.

Ebből ekvivalens átalakításokkal $1+\frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+2} < \frac{2}{k+1} + \frac{1}{y_k} < 1+\frac{2}{k+1}$, ahonnan $1 < y_{k+1} < 1+\frac{2}{k+1}$. Kaptuk tehát, hogy (3) minden pozitív egész n esetén teljesül, amiből adódóan $\{y_n\}$ konvergens és határértéke 1.

Az *a)* pontban szereplő határérték kiszámításához a következő lemmát fogjuk használni:

1. Lemma: Ha az $\{a_n\}$ pozitív tagú sorozatra $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ konvergens és $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = k\,(>0)$, akkor az $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ sorozat is konvergens és határértéke szintén k.

(A bizonyítás megtalálható pl. Pólya-Szegő: Feladatok és tételek az analízis köréből – Tankönyvkiadó, 1980. – I. kötetében, 2. fejezet, 1. paragrafus, 68.1. feladat.)

Legyen $a_n = \frac{x_n}{n^n}$ minden pozitív egész n-re. Ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_{n+1}}{nx_n}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = y_n\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}},$$

ezért $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$, tehát az első lemma értelmében

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{x_n}}{n} = \frac{1}{e}. \qquad (4)$$

A feladat *b)* alpontjában szereplő határérték kiszámításához egy másik lemmát használunk fel:

2. Lemma: Ha $\{b_n\}$ olyan 0-tól különböző tagokból álló sorozat, amelyre $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, akkor az $\left\{\frac{e^{b_n}-1}{b_n}\right\}$ sorozat konvergens és határértéke 1.

(Ez következik abból a tényből, hogy az $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ függvénynek a 0-ban létezik határértéke, és az 1. Ez utóbbi bizonyítása megtalálható pl. Urbán János Határértékszámítás – MOZAIK Oktatási Stúdió, Szeged, 1994. – című könyvében a 165-167. oldalakon.)

Alakítsuk a *b)* pontbeli sorozat általános tagját.

$$\sqrt[n+1]{x_{n+1}} - \sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{x_n}\left(\sqrt[n+1]{\frac{x_{n+1}}{x_n\sqrt[n]{x_n}}} - 1\right) =$$

$$= \sqrt[n]{x_n}\left(e^{\frac{1}{n+1}\left(\ln\frac{x_{n+1}}{nx_n} + \ln\frac{n}{\sqrt[n]{x_n}}\right)} - 1\right) =$$

$$= \frac{\sqrt[n]{x_n}}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n+1}\left(\ln y_n + \ln\frac{n}{\sqrt[n]{x_n}}\right)} - 1}{\frac{1}{n+1}\left(\ln y_n + \ln\frac{n}{\sqrt[n]{x_n}}\right)}\cdot\left(\ln y_n + \ln\frac{n}{\sqrt[n]{x_n}}\right) \qquad (5)$$

Legyen $b_n = \frac{1}{n+1}\left(\ln y_n + \ln\frac{n}{\sqrt[n]{x_n}}\right)$. Mivel $y_n > 1$, ezért $\ln y_n > 0$. (4) értelmében $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{x_n}} = e$, ezért létezik olyan N pozitív egész, hogy ha $n > N$, akkor $\ln\frac{n}{\sqrt[n]{x_n}} > 0$, azaz, ha $n > N$, akkor $b_n > 0$, vagyis a $\{b_n\}_{n>N}$ sorozat eleget tesz a 2. Lemma feltételeinek, ezért $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{b_n}-1}{b_n} = 1$. Figyelembe véve, hogy a logaritmus függvény folytonos, belátható, hogy $\lim_{n\to\infty}\ln y_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n}{\sqrt[n]{x_n}} = 1$. (5) alapján a kívánt határérték

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{x_{n+1}} - \sqrt[n]{x_n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{x_n}}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{e^{b_n}-1}{b_n}\cdot\left(\ln y_n + \ln\frac{n}{\sqrt[n]{x_n}}\right)\right] = \frac{1}{e}.$$

Dályay Pál Péter, Szeged

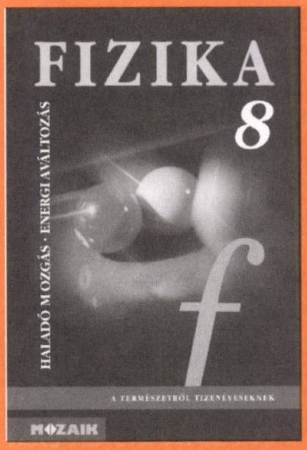
A megoldók száma: 3.

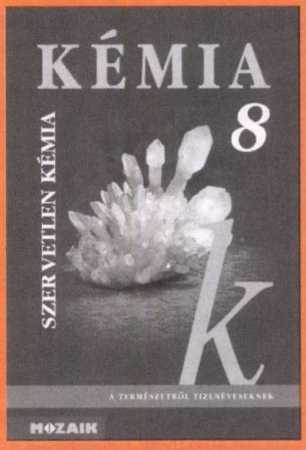
A megoldók névsora: Bíró Bálint, Eger (100., 101.); Dályai Pál Péter, Szeged (100-104.); Fitos László, Esztergom (100., 101.); Horváth Géza, Zselíz (100., 101.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (100., 101.); Kondor László, Dunaújváros (101.); László Sándor, Szombathely (100., 101.); Schutzbach Mártonné, Siófok (100., 101., 103.); Simon József, Csíkszereda (100-103.); Szász Róbert, Marosvásárhely (102-104.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (100-102., 104.).

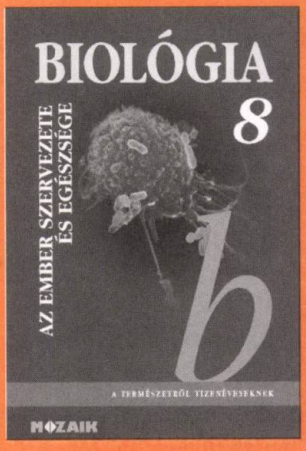
A TERMÉSZETRŐL

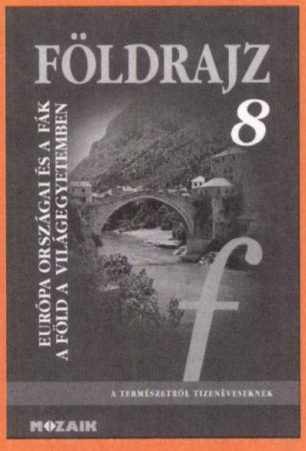
TERMÉSZETISMERET · BIOLÓGIA · FIZIKA · KÉMIA · FÖLDRAJZ

TIZENÉVESEKNEK









A Földrajz 8. és a Biológia 8. kötetek megjelenésével a Mozaik Kiadó népszerű tankönyvsorozata 5-8. osztályig teljessé válik. Minden tankönyv, munkafüzet és feladatlap megrendelhető az 1999/2000-es tanévre **az Oktatási Minisztérium megrendelőlapjának 124-127. oldalán.**

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 47-01-01, 470-052
MOZAIK KÖNYVESBOLTOK:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522